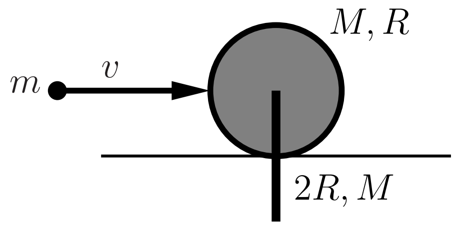
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

En un plano vertical fijo, un disco de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre una recta horizontal. Desde el centro del disco cuelga articulada una varilla de longitud $2R$, con igual masa M que la del disco, que tampoco puede salirse del plano vertical. Se pide:

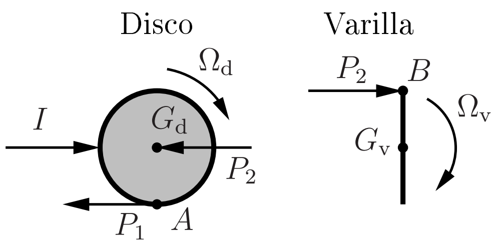


1. Cuando el sistema se encuentra en equilibrio estable, una partícula de masa m impacta horizontalmente con velocidad v en el disco a la altura de su centro, observándose que la velocidad de la partícula se anula tras el impacto. Calcular las velocidades del disco y varilla después del choque así como las percusiones reactivas, para lo que se podrá considerar que todas las percusiones son simultáneas.

2. Determinar la máxima masa m que puede tener la partícula y el valor que debe tomar el coeficiente de restitución e en este caso.

⋆

1.- La metodología seguida es considerar separados los dos sólidos rígidos, el disco y la varilla, sometidos a la percusión activa $I = mv$ y a las reactivas junto con sus ligaduras asociadas.



Con este planteamiento, las percusiones reactivas tienen dos causas. Por una parte el disco debe rodar sin deslizar en A tras el impacto, por lo que aparece la percusión reactiva P_1 de la figura. Por otra parte el extremo B de la varilla debe tener la misma velocidad que el centro del disco G_d, por lo que surge la pareja de percusiones P_2, iguales y de sentido contrario según el principio de acción y reacción. Todas estas percusiones son horizontales.

Las velocidades del disco y de la varilla quedan deteminadas por sus velocidades angulares Ω_d y Ω_v, respectivamente.

a) En primer lugar se estudia el subsistema formado por el disco. La velocidad horizontal del punto A (positivo hacia la derecha) viene dada por

$$v_A = v_{G,\mathrm{d}} - \Omega_\mathrm{d} R. \tag{1}$$

Aplicando el Teorema fundamental de la dinámica de impulsiones a este subsistema, se obtienen las igualdades de resultantes y momentos en el centro del disco:

$$M v_{G,\mathrm{d}} = I - P_1 - P_2 \quad \mathrm{e} \quad I_{G,\mathrm{d}} \Omega_\mathrm{d} = R P_1, \tag{2}$$

siendo $I_{G,\mathrm{d}} = MR^2/2$. Despejando $v_{G,\mathrm{d}}$ y Ω_d en (2), y sustituyéndolos en (1) se obtiene la velocidad de A en función de P_1 y P_2. Esta velocidad debe ser nula al no haber deslizamiento según el enunciado,

$$v_A = \frac{I - 3P_1 - P_2}{M} = 0. \tag{3}$$

Por tanto,

$$P_1 = \frac{I - P_2}{3}, \tag{4}$$

que junto con la primera ecuación de (2) permiten expresar la velocidad del centro del disco como

$$v_{G,\mathrm{d}} = \frac{2(I - P_2)}{3M}. \tag{5}$$

b) El estudio se centra ahora en el subsistema formado por la varilla. La velocidad de B es

$$v_B = v_{G,\mathrm{v}} + \Omega_\mathrm{v} R. \tag{6}$$

Por otra parte, en este caso la aplicación del Teorema fundamental, tomando momentos en el centro de masa de la varilla, permite escribir

$$M v_{G,\mathrm{v}} = P_2 \quad \text{e} \quad I_{\mathrm{G,v}} \Omega_\mathrm{v} = R P_2, \tag{7}$$

siendo $I_{\mathrm{G,v}} = M(2R)^2/12$. Despejando $v_{G,\mathrm{v}}$ y Ω_v en (7), y sustituyéndolos en (6) se llega a

$$v_B = \frac{4P_2}{M}. \tag{8}$$

c) Para que los movimientos de los dos subsistemas sean compatibles, debe verificarse $v_{G,\mathrm{d}} = v_B$. Teniendo en cuenta (5) y (8), se obtiene

$$\frac{2(I - P_2)}{3M} = \frac{4P_2}{M}. \tag{9}$$

Por tanto

$$P_2 = \frac{I}{7} = \frac{mv}{7}, \tag{10}$$

que sutituyendo en (4) determina

$$P_1 = \frac{2mv}{7}. \tag{11}$$

Una vez conocidas las percusiones reactivas P_1 y P_2, teniendo en cuenta las segundas ecuaciones de (2) y de (7), se determinan las velocidades inmediatamente después del choque:

$$\Omega_\mathrm{d} = \frac{4mv}{7MR} \quad \text{y} \quad \Omega_\mathrm{v} = \frac{3mv}{7MR}. \tag{12}$$

2.- Finalmente, el coeficiente de restitución es

$$e = -\frac{0 - v_{G,\mathrm{d}}}{v - 0} = \frac{4m}{7M}. \tag{13}$$

Su valor máximo posible es 1, correspondiendo con el caso de choque elástico. Por tanto, para que la partícula pueda tener velocidad nula tras el impacto es necesario que su masa verifique $m \leq 7M/4$.

Observación: Se hace notar que la condición de rodadura sin deslizamiento definida en el enunciado exige una percusión reactiva P_1, que no podría desarrollarse si dicha condición proviniese de un rozamiento de Coulomb, ya que en este caso la reacción tangencial estaría acotada y el disco deslizaría debido a la percusión activa. La materialización de la rodadura puede suponerse debida a un engranaje dentado entre el disco y la recta horizontal, pero no al rozamiento.