Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

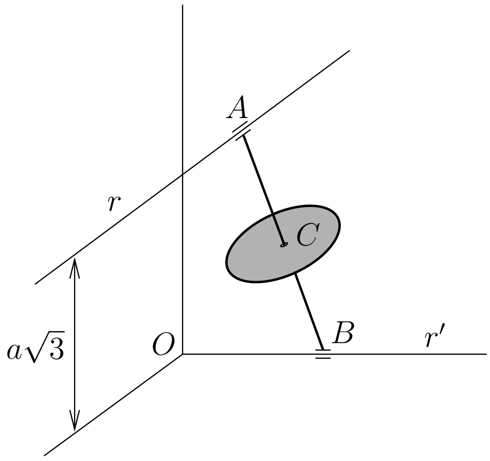
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido está formado por un disco homogéneo de masa m y radio R soldado perpendicularmente por su centro C al punto medio de una varilla de masa m y longitud $2a$. Este sólido se mueve de forma que los extremos A y B de la varilla están articulados y deslizan sin rozamiento sobre dos rectas horizontales r y r' que se cruzan perpendicularmente a una distancia $a\sqrt{3}$. Además, el sólido puede girar libremente alrededor de la varilla. Se pide:



1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresarlas en función de los grados de libertad y sus derivadas, considerando condiciones iniciales genéricas; integrar completamente estas ecuaciones obteniendo las expresiones de los g.d.l. en función del tiempo (ecuaciones horarias).

2. Calcular las reacciones.

1.- En primer lugar, se observa que el triángulo definido por el extremo A, su proyección horizontal A' y el extremo B es rígido, de forma que la varilla AB forma en todo momento 60° con la horizontal, tal y como muestra la Figura 1. El movimiento de la varilla es por tanto plano, ya que la velocidad de todos sus puntos es horizontal.

En consecuencia, el sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo ψ que forma la proyección horizontal $A'B$ de la varilla con r' y el giro φ alrededor de la varilla.

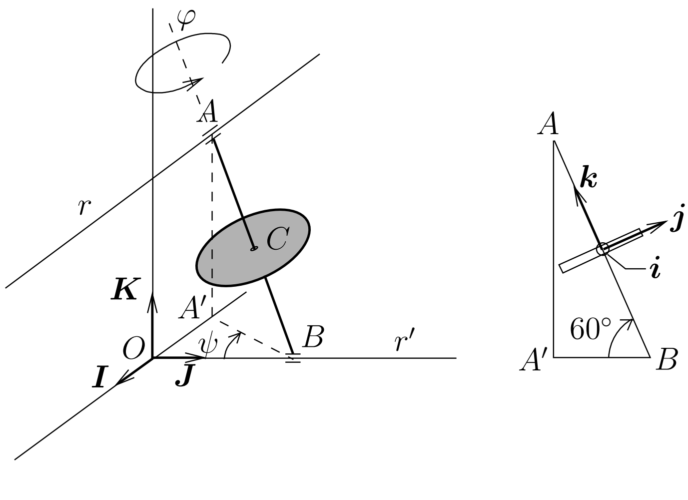


Figura 1: *Definición los grados de libertad y del sistema móvil auxiliar*

Existen dos integrales primeras. Se conserva la componente según la varilla del momento cinético del sólido en $G \equiv C$, ya que el momento de las fuerzas externas según esa dirección es nulo y además es el eje de revolución del sólido. Por otro lado se conserva la energía total del sistema, ya que ninguna fuerza trabaja (ni siquiera el peso, ya que el centro de masa se mantiene siempre a la misma altura). Estas dos integrales primeras proporcionan las dos ecuaciones del movimiento del sólido.

Por conveniencia definimos un triedro fijo $\{O;\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K}\}$ y un triedro móvil (intermedio) $\{C;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ que muestra la Figura 1, de forma que $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla, $\boldsymbol{i}$ es horizontal y $\boldsymbol{j}$ lleva la dirección de máxima pendiente del disco.

La velocidad angular del sólido resulta de la composición de la rotación de la varilla y el giro alrededor de ésta:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

Teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{K} = (1/2)\boldsymbol{j} + (\sqrt{3}/2)\boldsymbol{k} \ , \tag{1}$$

la velocidad de rotación se expresa en el triedro intermedio como:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2}\dot{\psi}\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi})\boldsymbol{k}$$

Por otro lado, el tensor central de inercia del sólido se expresa en el sistema intermedio como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}ma^2 \ , \quad C = \frac{1}{2}mR^2$$

de forma que una ecuación del movimiento resulta:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = C\left(\dot{\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\right) = Cr = cte. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{r}_G = -(a/2)\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{I} + (a/2)\cos\psi\boldsymbol{J} + (a\sqrt{3}/2)\boldsymbol{K}$, y que por tanto $\boldsymbol{v}_G = d\boldsymbol{r}_G/dt = -(a/2)\dot{\psi}\cos\psi\boldsymbol{I} - (a/2)\dot{\psi}\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{J}$, la otra ecuación del movimiento resulta:

$$E = T = \frac{1}{2}2mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H}_G = \frac{1}{2}2m\frac{a^2}{4}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left[A\frac{1}{4}\dot{\psi}^2 + Cr^2\right] = cte. \tag{3}$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce que $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = cte$ y $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = cte$, por lo que las ecuaciones horarias resultan:

$$\psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0 \quad , \qquad \varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0$$

2.- Teniendo en cuenta que no existe rozamiento, las reacciones $\boldsymbol{R}_A$ y $\boldsymbol{R}_B$ se expresan en el triedro fijo como:

$$\boldsymbol{R}_A = Z_A\boldsymbol{K} + Y_A\boldsymbol{J} \quad , \qquad \boldsymbol{R}_B = Z_B\boldsymbol{K} + X_B\boldsymbol{I} \tag{4}$$

El planteamiento del principio de la cantidad de movimiento en el triedro fijo proporciona directamente las componentes horizontales de las reacciones y una relación entre las verticales. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_G = d\boldsymbol{v}_G/dt = (a/2)\dot{\psi}_0^2\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{I} - (a/2)\dot{\psi}_0^2\cos\psi\boldsymbol{J}$, resulta:

$$\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B - 2mg\boldsymbol{K} = 2m\boldsymbol{a}_G \tag{5}$$

$$X_B = ma\dot{\psi}_0^2\operatorname{sen}\psi \tag{6}$$

$$Y_A = -ma\dot{\psi}_0^2\cos\psi \tag{7}$$

$$Z_A + Z_B - 2mg = 0 \tag{8}$$

Obtenemos otra ecuación que permita obtener finalmente las reacciones verticales mediante el planteamiento del principio del momento cinético en G:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G$$

El momento de las fuerzas externas $\boldsymbol{M}_G$ se expresa como:

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{GA} \wedge \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{GB} \wedge \boldsymbol{R}_B \tag{9}$$

La expresión (1) junto con las que se muestran a continuación relacionan los versores fijos con los móviles:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \cos\psi \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\psi \boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\psi \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{J} &= -\operatorname{sen}\psi \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi \boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\cos\psi \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{GA} = -\boldsymbol{GB} = a\boldsymbol{k}$ e introduciendo (1) y (10) en (4), el momento dado por (9) resulta expresado en el triedro intermedio:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{a}{2}\left(-Z_A - \sqrt{3}Y_A\cos\psi + Z_B + \sqrt{3}X_B\operatorname{sen}\psi\right)\boldsymbol{i} - a\left(Y_A\operatorname{sen}\psi + X_B\cos\psi\right)\boldsymbol{j} \tag{11}$$

Por otor lado, la derivada del momento cinético en G se puede calcular como:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right)_{rel} - \dot{\psi}\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{0} - \frac{1}{2}\dot{\psi}_0\left(A\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}_0 + Cr\right)\boldsymbol{i} \tag{12}$$

Igualando (11) con (12) y teniendo en cuenta las reacciones Y_A y X_B dadas por (7) y (6) se obtiene:

$$Z_B - Z_A = -2\beta \quad , \qquad \text{con} \quad \beta = ma\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}_0^2 + \frac{C}{2a}r\dot{\psi}_0 + \frac{A}{2a}\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}_0^2 \tag{13}$$

Las ecuaciones (8) y (13) permiten obtener finalmente las reacciones verticales en función de la constante β definida anteriormente:

$$Z_A = mg + \beta \quad , \qquad Z_B = mg - \beta$$