

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2007)

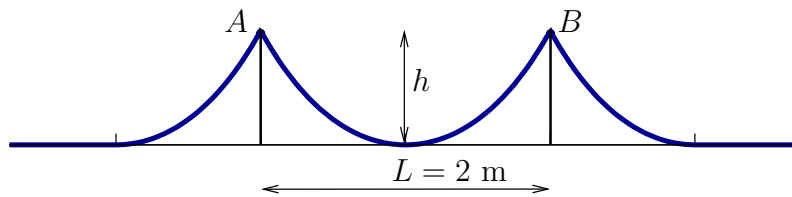
Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45)

Tiempo: 60 min.

Un hilo homogéneo, de peso específico 10 N/m, pasa sobre dos clavos lisos A y B , distantes $L = 2$ m y situados a la misma altura h respecto de un suelo horizontal rugoso. Se desea que la catenaria que se forma entre los dos clavos alcance a tocar el suelo. El coeficiente de rozamiento entre hilo y suelo vale $1/2$. Se pide:

1. Calcular el valor de h que hace que la longitud necesaria del hilo sea mínima.
2. Calcular la reacción en cada uno de los clavos, para el valor de h anteriormente calculado.

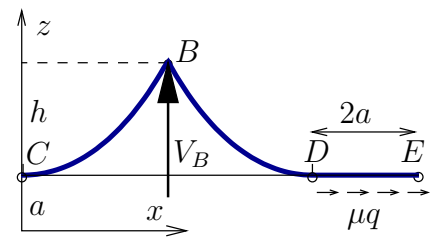


NOTA: La ecuación $x \cosh x - \sinh x = 1$ tiene como solución $x = 1,35831$.

★

1.— El hilo es simétrico respecto al punto medio C . El tramo externo de catenaria es tangente al suelo en el punto de contacto que denominamos D (no hay fuerzas concentradas). El rozamiento en el tramo apoyado DE debe equilibrar la tensión horizontal $T_0 = qa$ en D , y si la longitud del hilo es mínima el tramo DE estará en el límite de rozamiento:

$$T_0 = qa = \mu q S_{DE} \Rightarrow S_{DE} = 2a. \quad (1)$$



Los tramos de catenaria son $S_{CB} = S_{BD} = a \sinh \frac{L/2}{a}$, y la longitud total (de esta mitad) resulta

$$S_{CE} = 2a \sinh \frac{L}{2a} + 2a. \quad (2)$$

La condición de mínimo se obtiene derivando respecto al parámetro a :

$$0 = \frac{dS_{CE}}{da} = 2 \sinh \frac{L}{2a} + 2a \left(-\frac{L}{2a^2} \right) \cosh \frac{L}{2a} + 2 = 2(\sinh \beta - \beta \cosh \beta + 1), \quad (3)$$

donde se ha denominado $\beta = L/(2a)$. Esta ecuación trascendente tiene por solución

$$\beta = 1,35831 \Rightarrow a = L/(2\beta) = 0,73621 \text{ m}. \quad (4)$$

En caso que el enunciado no hubiera proporcionado esta solución debería obtenerse por un método numérico iterativo, como el método de Newton. Finalmente obtenemos la altura

$$h = a \cosh \frac{L}{2a} - a = 0,79021 \text{ m}. \quad (5)$$

2.— Las reacciones en A y B son verticales ya que los clavos son lisos. Se deben a la tensión vertical de las catenarias a ambos lados, resultando

$$V_A = V_B = 2qa \sinh \frac{L}{2a} = 26,743 \text{ N}. \quad (6)$$