Mecánica

EXAMEN PARCIAL (5 de diciembre del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema binario aislado, formado por dos masas m_0 y m_1 que se atraen mutuamente mediante fuerzas gravitatorias. *Expresar* la ecuación del movimiento de m_1 con respecto a un sistema de referencia que no gira con origen en el centro de masas G, en función de $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_G$. *Discutir* si el sistema de referencia anterior es inercial. (5 ptos.)

Al tratarse de un sistema aislado, derivando dos veces la definición de c.d.m. obtenemos que éste se mueve con aceleración nula. En efecto:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1}{m_0+m_1}\,; \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_G = \frac{m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0 + m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1}{m_0+m_1} = \frac{\boldsymbol{F}_{01}+\boldsymbol{F}_{10}}{m_0+m_1}\,,$$

y como por la tercera ley de Newton $\boldsymbol{F}_{01} = -\boldsymbol{F}_{10}$, se llega a

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_G = 0\,.$$

Por tanto podemos adelantar que el sistema c.d.m. es inercial, ya que se traslada con movimiento uniforme. Planteando en él la ecuación fundamental de la dinámica para la fuerza gravitatoria sobre m_1:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}} = m_1(\ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{0}) = G\frac{m_0 m_1}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,,$$

pero

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{m_0\boldsymbol{r}_0+m_1\boldsymbol{r}_1}{m_0+m_1} = \frac{m_0}{m_0+m_1}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\,,$$

de donde:

$$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{\rho}\frac{m_0+m_1}{m_0}\,,$$

y sustituyendo obtenemos la ecuación pedida:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -G\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\,.$$

Definir el concepto de factor de amplificación dinámica en el movimiento forzado de un sistema lineal con un grado de libertad. (NOTA: Se entiende, para que este concepto tenga sentido, que la fuerza aplicada es una función acotada). *Aplicación:* Deducir el factor de amplificación dinámica para una carga constante aplicada de forma instantánea, suponiendo que no hay amortiguamiento. (5 ptos.)

Se define el factor de amplificación dinámica como la relación entre la máxima elongación a lo largo del movimiento y la que se obtendría en el caso del equilibrio con el máximo valor de la carga aplicada:

$$f = \frac{x_{\text{din,máx}}}{x_{\text{est}}}\,.$$

En lo que sigue consideraremos un sistema lineal general con masa m, rigidez k y amortiguamiento viscoso c, definido por una ecuación diferencial del tipo

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)\,,$$

al que corresponde la frecuencia natural del sistema no amortiguado $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y la tasa de amortiguamiento crítico $\xi = c/(2m\omega_0)$.

NOTA: Un caso particular interesante (pero que no corresponde al caso general preguntado) es la *amplificación en régimen permanente para cargas armónicas* $F(t) = q \operatorname{sen} \Omega t$. El régimen permanente es $x(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$, al que se llega por el inevitable amortiguamiento. En este caso, la definición tomaría la forma

$$f = \frac{A}{q/k} \quad \text{con } A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}\,.$$

En la aplicación pedida, si llamamos $F(t) = P$ a la carga constante, tenemos:

$$x(t) = \frac{P}{k} - \frac{P}{k}\cos\omega_0 t\,,$$

donde el primer sumando surge como solución particular de la ecuación completa y el segundo como solución general de la homogénea. Se ha considerado amortiguamiento despreciable según el enunciado. El máximo absoluto es

$$x_{\text{din,máx}} = 2\frac{P}{k}$$

y como $x_{\text{est}} = P/k$ llegamos a que

$$\boxed{f = 2\,.}$$