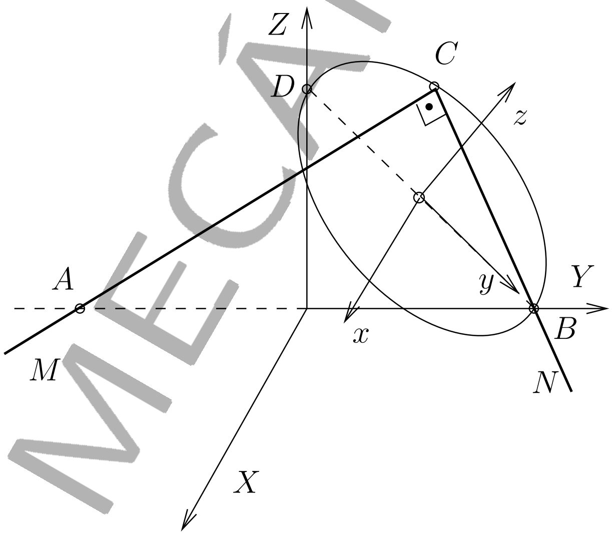
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (5 de diciembre del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Una escuadra MCN (siendo $\angle MCN = \pi/2$) se mueve de forma que su vértice C recorre una circunferencia de radio $a/\sqrt{2}$ situada en el plano $Y + Z = a$, pasando por los puntos $B \equiv (0, a, 0)$ y $D \equiv (0, 0, a)$ con velocidad $v_C = \sqrt{2}\, a\omega$. Además las varillas CM y CN pasan siempre por los puntos fijos $A \equiv (0, -a, 0)$ y $B \equiv (0, a, 0)$ respectivamente. Del movimiento así definido se pide:

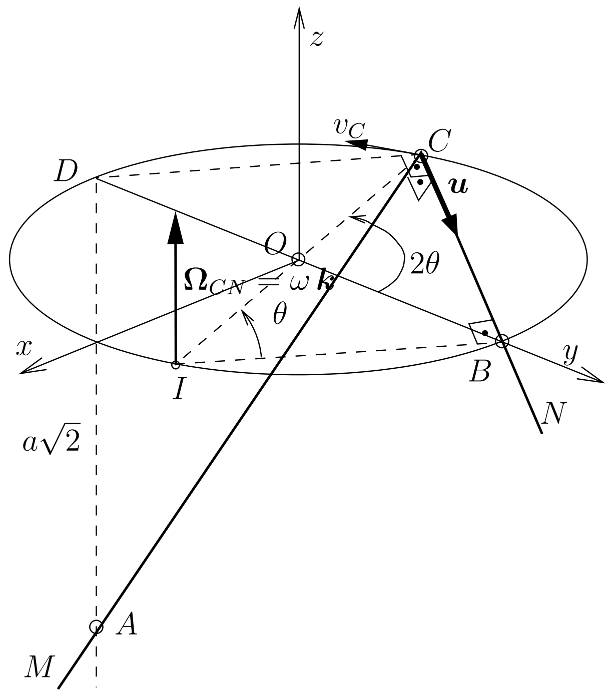


1. Velocidad angular de la varilla CN en su movimiento plano; velocidad de los puntos de la escuadra sobre los puntos A y B.
2. Velocidad angular de la escuadra, expresando sus componentes en los ejes móviles ligados a la misma.
3. Aceleración angular de la escuadra y aceleración del punto de la misma sobre B.

⋆

1.— Para describir el movimiento trabajaremos en el sistema $Oxyz$ que contiene a la circunferencia en el plano inclinado Oxy. En la figura adjunta se representa la circunferencia y el movimiento de la escuadra en este triedro. Observamos que el punto A está situado en la perpendicular al plano por D, a una distancia $a\sqrt{2}$.

Como dice el enunciado, el movimiento de CN es plano dentro de Oxy. El centro instantáneo de rotación I se obtiene como intersección de la dirección normal a la velocidad de C (dirección radial) y a la velocidad del punto sobre de la barra sobre B. La velocidad del punto de una recta que pasa por un punto fijo es según dicha recta, por lo que BI será normal a BC. Teniendo en cuenta la propiedad del arco capaz de $\pi/2$ el centro instantáneo I estará situado en el punto de la circunferencia diametralmente opuesto a C.

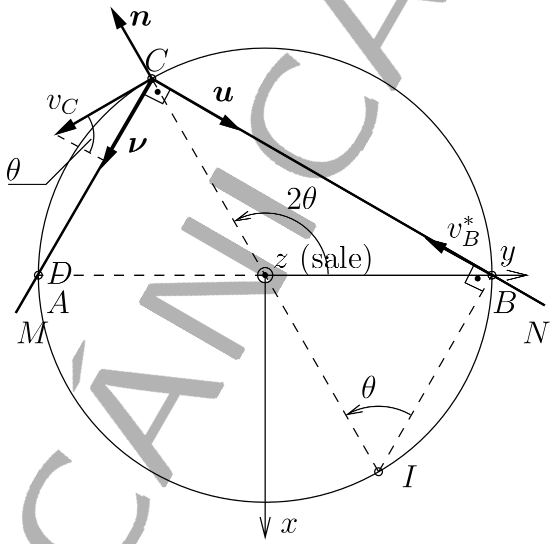


La velocidad angular de CN resulta de dividir la velocidad de C por la distancia al centro de rotación I,

$$\Omega_{CN} = \frac{v_C}{\overline{IC}} = \frac{\sqrt{2}\,a\omega}{\sqrt{2}\,a} = \omega\,; \quad \boldsymbol{\Omega}_{CN} = \omega\boldsymbol{k}\,. \qquad (1)$$

Llamaremos θ al ángulo $\angle CIB$, por las propiedades del arco capaz será $\angle COB = 2\theta$. No se define en el enunciado la posición en $t = 0$, pero en cualquier caso podremos considerar θ conocido; suponiendo por ejemplo que inicialmente estuviera C sobre B sería $\theta = \omega t$.

Debemos tener en cuenta por otra parte que la velocidad de rotación de la escuadra será la composición de la velocidad de rotación del segmento CN, $\boldsymbol{\Omega}_{CN}$, y una rotación alrededor de la propia recta CN, de forma que CM se mantenga sobre A. Esta otra componente de la rotación la calcularemos en el apartado siguiente.



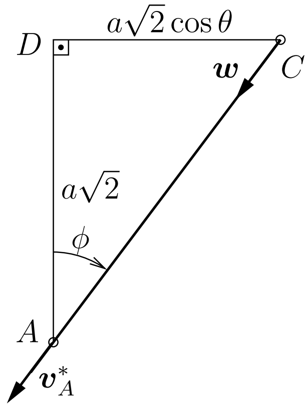
La velocidad del punto sobre B se obtiene del movimiento plano de CN considerando que $\overline{IB} = a\sqrt{2}\cos\theta$:

$$\boldsymbol{v}_B^* = \Omega_{CN}\overline{IB}\,(-\boldsymbol{u}) = -\omega a\sqrt{2}\cos\theta\,\boldsymbol{u}\,, \tag{2}$$

donde se ha empleado la notación $\boldsymbol{v}_B^*$ para indicar la velocidad del punto del sólido sobre B en un instante dado, que no debe confundirse con la velocidad de B (que en este caso es nula). El versor $\boldsymbol{u}$ sigue la dirección CB.

La velocidad del punto sobre A irá dirigida según AC. En la figura adjunta se dibuja el plano por DC normal a xy en verdadera magnitud, plano que contiene también al punto A de la escuadra. La recta AC define la máxima pendiente del plano de la escuadra. Considerando que $\overline{DC} = \overline{IB} = a\sqrt{2}\cos\theta$ se obtiene

$$\operatorname{tg}\phi = \cos\theta\,. \tag{3}$$



Para calcular $\boldsymbol{v}_A^*$ emplearemos la propiedad de equiproyectividad del campo de velocidades del sólido rígido, entre los puntos C y A. Las velocidades de estos puntos proyectadas según la recta CA (definida por el versor $\boldsymbol{w}$ de la figura) deben ser iguales:

$$\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_A^* \cdot \boldsymbol{w} = v_A^*\,, \tag{4}$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad del punto sobre A lleva precisamente la dirección del segmento CA. Para proyectar $\boldsymbol{v}_C$ primero proyectamos perpendicularmente al plano CDA, sobre CD, y a continuación dentro de este plano sobre CA:

$$\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{w} = v_C \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = v_C \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{tg}\phi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\phi}} = a\omega\sqrt{2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\,, \tag{5}$$

por lo que finalmente

$$\boldsymbol{v}_A^* = a\omega\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{w} = a\omega\sqrt{2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\,\boldsymbol{w}\,. \tag{6}$$

2.— La otra componente de la velocidad de rotación de la escuadra es la que proviene de la rotación definida por el ángulo ϕ, cuya derivada a partir de (3) es

$$\dot{\phi} = -\omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\,, \tag{7}$$

con lo que resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{k} - \dot{\phi}\,\boldsymbol{u} = \omega\,\boldsymbol{k} + \omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\boldsymbol{u}\,. \tag{8}$$

3.— La aceleración angular se obtiene derivando (8); teniendo en cuenta que el primer sumando es constante,

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\ddot{\phi}\,\boldsymbol{u} - \dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{9}$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\right) = -\omega^2\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta} + \frac{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\right)\\ &= -\omega^2\frac{\cos\theta(2+\operatorname{sen}^2\theta)}{(1+\cos^2\phi)^2}\,;\end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \omega\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u} = -\omega\,\boldsymbol{\nu}\,, \tag{11}$$

donde se ha empleado el versor $\boldsymbol{\nu}$ según CD, definido en la figura anterior. La aceleración angular resulta

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= -\ddot{\phi}\,\boldsymbol{u} + \dot{\phi}\omega\,\boldsymbol{\nu}\\ &= \omega^2\frac{\cos\theta(2+\operatorname{sen}^2\theta)}{(1+\cos^2\phi)^2}\boldsymbol{u} - \omega^2\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\boldsymbol{\nu}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Por último, para calcular la aceleración del punto sobre B tendremos en cuanta de nuevo que el movimiento de CN es plano. Dado que además la velocidad angular de este movimiento es constante,

$$\boldsymbol{a}_B^* = \boldsymbol{a}_C - \omega^2\overline{CB}\,\boldsymbol{u} = -a\sqrt{2}\,\omega^2(2\,\boldsymbol{n} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u})\,, \tag{13}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el versor según la dirección radial en C (ver figura anterior).