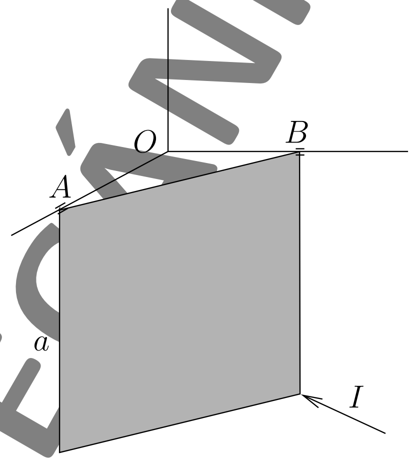
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de diciembre de 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada de lado a y masa m se encuentra colgada de dos vértices adyacentes A y B, de forma que cada uno de ellos puede deslizar libremente sobre dos rectas fijas lisas horizontales y perpendiculares que se cortan en un punto O. Estando la placa vertical, en reposo y situada de forma que los vértices A y B equidistan del punto O, la placa recibe una impulsión I perpendicular a su plano en uno de sus vértices inferiores.



Se pide:

1. Obtener el campo de velocidades de la placa inmediatamente después de recibir la impulsión;
2. Obtener las reacciones impulsivas en los vértices A y B.

⋆

1. El campo de velocidades inmediatamente después queda determinado por la velocidad de un punto (por ejemplo su centro de masas G) y el vector velocidad angular, $\boldsymbol{\Omega}$.

Por conveniencia definimos un sistema de referencia auxiliar $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, de forma que $\boldsymbol{i}$ es horizontal y perpendicular al lado AB, $\boldsymbol{j}$ es también horizontal y perpendicular al anterior, y $\boldsymbol{k}$ vertical formando con los otros dos un triedro a derechas.

En primer lugar, se observa que el movimiento de la placa se puede interpretar como la composición de dos rotaciones que se cruzan: Ω_z correspondiente al del movimiento plano del lado AB, cuyo CIR es el punto C, y el giro Ω_y alrededor de dicho lado. La componente Ω_x según $\boldsymbol{i}$ es nula, ya que en caso contrario induciría una componente vertical a la velocidad de los vértices A y B, incompatible con las restricciones del movimiento.

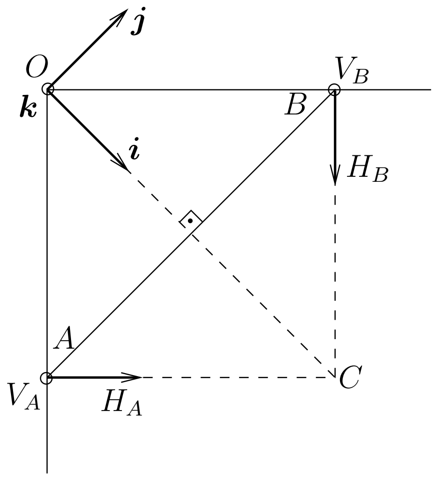


Figura 1: *Vista en planta, con el sistema de referencia auxiliar*

Consecuencia del razonamiento anterior es que la velocidad de G es horizontal, y por tanto el campo de velocidades queda determinado por cuatro escalares: $v_{G_x}, v_{G_y}, \Omega_x$ y Ω_y.

Por otro lado aparecen impulsiones reactivas horizontales y verticales (H_A, V_A) y (H_B, V_B) en los vértices A y B respectivamente.

De la aplicación del balance de cantidad de movimiento vertical se deduce que las reacciones en A deben ser iguales en magnitud y de sentido contrario:

$$V_A + V_B = 0 \tag{1}$$

Por otro lado, es posible plantear el balance del momento cinético en un punto cualquiera. El punto C ofrece ventajas, ya que solo dan momento las componentes verticales de las reacciones y la impulsión externa, aplicada en el vértice que denotaremos D:

$$\Delta \boldsymbol{H}_C = \boldsymbol{M}_C \qquad , \qquad \boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{CD} \wedge (-I\boldsymbol{i}) + \boldsymbol{CB} \wedge V_B\boldsymbol{k} + \boldsymbol{CA} \wedge V_A\boldsymbol{k}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{CD} = -(a/2)\boldsymbol{i} + (a/2)\boldsymbol{j} - a\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{CB} = -(a/2)\boldsymbol{i} + (a/2)\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{CA} = -(a/2)\boldsymbol{i} - (a/2)\boldsymbol{j}$, el momento de todas las impulsiones en C resulta:

$$\boldsymbol{M}_C = \frac{a}{2}(V_B - V_A)\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}(2I + V_B + V_A)\boldsymbol{j} + \frac{a}{2}I\boldsymbol{k} \tag{2}$$

El momento cinético en C se puede calcular como

$$\boldsymbol{H}_C = \boldsymbol{H}_G + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GC} \quad , \tag{3}$$

y sus distintos términos se obtienen con las relaciones:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{12}ma^2\left(\Omega_y\boldsymbol{j} + \Omega_z\boldsymbol{k}\right) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AG} = -\frac{a}{2}\left(\Omega_y\boldsymbol{i} + \Omega_z\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{GC} = \frac{a}{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$$

Empleando las expresiones (4) en (3) y operando se obtiene el vector $\boldsymbol{H}_C$; igualando éste al momento de las impulsiones en C dado en (2) se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$-\frac{1}{4}ma^2\Omega_z = \frac{a}{2}(V_B - V_A) \tag{5}$$

$$\frac{1}{12}ma^2\Omega_y + \frac{1}{4}ma^2\Omega_y = aI + \frac{a}{2}(V_B + V_{A)} \tag{6}$$

$$\frac{1}{12}ma^2\Omega_z + \frac{1}{4}ma^2\Omega_z = \frac{a}{2}I \tag{7}$$

Introduciendo (1) en (6) se obtiene Ω_y, y la ecuación (7) proporciona directamente Ω_z, con lo que el vector velocidad angular resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{3I}{2ma}(2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \tag{8}$$

y empleando la segunda expresión de (4) se obtiene la velocidad de G:

$$\boldsymbol{v}_G = -\frac{3I}{4m}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \tag{9}$$

2. Una vez calculada la velocidad angular, las impulsiones reactivas verticales se obtienen empleando las relaciones (1) y (5), resultando:

$$V_A = -V_B = \frac{3}{8}I$$

Las horizontales se obtienen planteando el balance de cantidad de movimiento horizontal $\boldsymbol{H}_A + \boldsymbol{H}_B + \boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_G$ con la ayuda de (9), resultando:

$$H_B = -\frac{1}{5}H_A = \frac{\sqrt{2}}{8}I$$