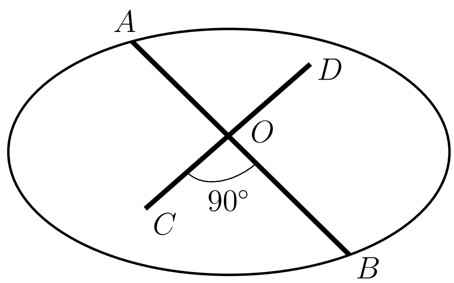
Mecánica

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (10 de marzo de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido S está constituido por dos barras homogéneas AB (de masa $2m$ y longitud $2b$) y CD (de masa m y longitud b) que están soldadas ortogonalmente por sus centros O. Los extremos A y B están obligados a moverse sobre una circunferencia horizontal lisa de radio b.

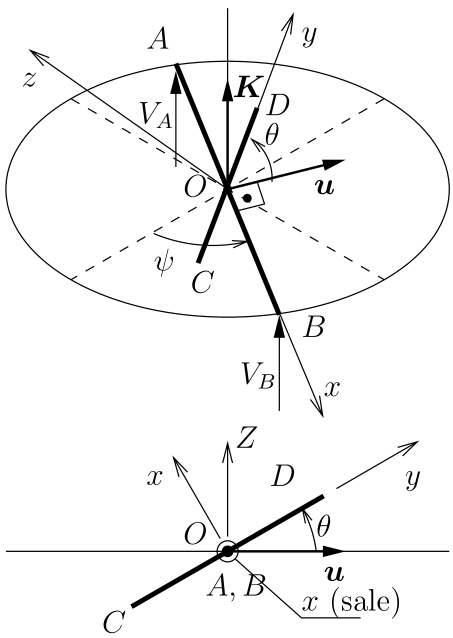


Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad de S, definiendo unos parámetros adecuados para representarlos. Expresar la Lagrangiana en función de dichos parámetros.
2. Determinar si existen integrales primeras, expresándolas e interpretándolas físicamente.
3. Expresar las componentes verticales de las reacciones en A y B.
4. Si inicialmente la velocidad de A es nula, describir el movimiento de S.

⋆

1.— El sólido tiene dos grados de libertad, que podemos definir como el ángulo ψ girado por AB en la circunferencia, y el giro θ de CD alrededor de AB.



Considerando el triedro del cuerpo $Oxyz$, el tensor de inercia es:

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} ;$$

$$A = \frac{1}{12}mb^2,\ B = \frac{1}{12}2m(2b)^2 = \frac{2}{3}mb^2,\ C = A + B = \frac{3}{4}mb^2 .$$

La velocidad de rotación vale

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} = \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{k} . \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que el centro de gravedad O no se mueve, el potencial es constante y la Lagrangiana vale

$$\begin{aligned} L = T &= \frac{1}{2}\frac{1}{12}mb^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mb^2\dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\frac{3}{4}mb^2\dot\psi^2\cos^2\theta \\ &= \frac{1}{24}mb^2\left[\dot\theta^2 + (8+\cos^2\theta)\dot\psi^2\right] . \end{aligned} \tag{2}$$

2.— La coordenada ψ es cíclica, por lo que el momento asociado es constante,

$$p_\psi = \frac{1}{12} m b^2 (8 + \cos^2\theta)\dot{\psi} = C_1 \,. \tag{3}$$

Esta expresión equivale a la componente del momento cinético sobre el eje vertical Z, $p_\psi = \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K}$. Ésta se conserva puesto que el momento de las fuerzas exteriores en O, debido a las reacciones V_A y V_B, es horizontal.

Otra integral primera es la conservación de la energía, ya que las fuerzas son conservativas, los enlaces lisos y no hay movimientos impuestos. La expresión es

$$E = T = \frac{1}{24} m b^2 \left[\dot{\theta}^2 + (8 + \cos^2\theta)\dot{\psi}^2\right] = C_2 \,. \tag{4}$$

3.— Las reacciones V_A, V_B pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de balance de fuerza vertical y del momento. La primera es

$$V_A + V_B = 3mg \,. \tag{5}$$

Por otra parte el momento en O vale $\boldsymbol{M}_O = (V_A - V_B) b\, \boldsymbol{u}$. Las componentes según los ejes del cuerpo son $M_x = 0$, $M_y = M_u \cos\theta$, $M_z = -M_u \operatorname{sen}\theta$. La ecuación de Euler en dirección y es

$$M_y = B\dot{q} - (C - A)rp \quad \Rightarrow \quad (V_A - V_B) = \frac{2}{3} m b \ddot{\psi} \operatorname{tg}\theta \,. \tag{6}$$

Combinando las ecuaciones (5) y (6) resultan

$$V_A = \frac{3}{2} mg + \frac{1}{3} m b \ddot{\psi} \operatorname{tg}\theta \,; \quad V_B = \frac{3}{2} mg - \frac{1}{3} m b \ddot{\psi} \operatorname{tg}\theta \,.$$

4.— Si la velocidad inicial de A es nula, será $\dot{\psi}_0 = 0$. En consecuencia, la integral primera (3) es nula y se deduce $\dot{\psi} = 0$ en todo instante. La constancia de la energía impone entonces que sea $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ constante. En definitiva, el movimiento se reduce a una rotación con velocidad constante $\dot{\theta}_0$ alrededor del eje AB que permanecerá inmóvil.