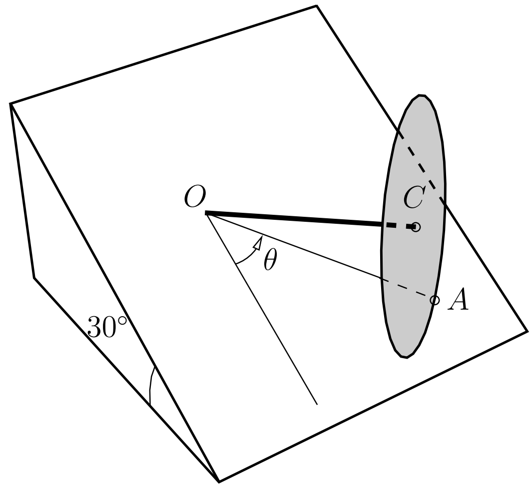
Mecánica

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (10 de marzo de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado, homogéneo de masa $m/2$ y radio a, tiene unida rígidamente y perpendicular a él una varilla OC de masa $m/2$ y longitud $a\sqrt{3}$ (véase la figura). El sólido descrito rueda sin deslizar sobre un plano inclinado 30º respecto al horizontal (tanto el extemo O de la varilla como el borde del disco se apoyan siempre sobre el plano).

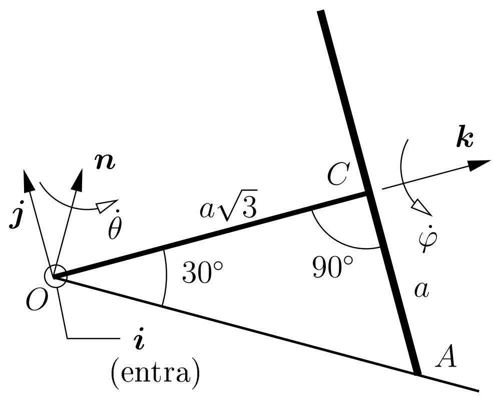


Se pide:

1. Determinar el tensor de inercia del sólido en O. En función del ángulo θ que forma la proyección de la varilla sobre el plano con su dirección de máxima pendiente, obtener la expresión del momento cinético en O en un instante genérico.
2. Ecuación de Lagrange correspondiente a θ.
3. Si inicialmente $\theta_0 = 0$, determinar la mínima velocidad angular $\dot{\theta}_0$ que hace que el sólido dé vueltas completas alrededor de O.

———————— ⋆ ————————

1.- Sea $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base ortonormal a derechas móvil tal que $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección de la varilla $\overrightarrow{OC}$ e $\boldsymbol{i}$ es paralelo al plano inclinado. El tensor de inercia en esta base tiene las componentes



$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

siendo

$$A = \underbrace{\frac{1}{3}\frac{m}{2}(a\sqrt{3})^2}_{\text{varilla}} + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{m}{2}a^2 + \frac{m}{2}(a\sqrt{3})^2}_{\text{disco (Steiner)}} = \frac{17}{8}ma^2 \quad \text{y}$$

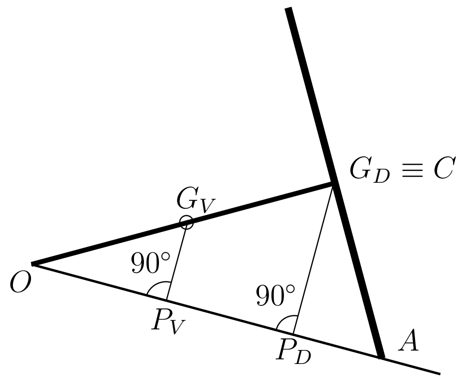
$$C = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m}{2}a^2}_{\text{disco}} = \frac{1}{4}ma^2.$$

La velocidad angular se puede expresar como $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{n} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{n}$ el versor normal al plano inclinado. El punto O es fijo, y para que el disco ruede sin deslizar es necesario que $\dot{\theta} + \dot{\varphi}\operatorname{sen} 30^\circ = 0$, y por tanto $\dot{\varphi} = -2\dot{\theta}$. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{n} = \cos 30^\circ\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} 30^\circ\,\boldsymbol{k}$, la velocidad angular y el momento cinético en O resultan

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = A\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{j} - C\frac{3}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k}.$$

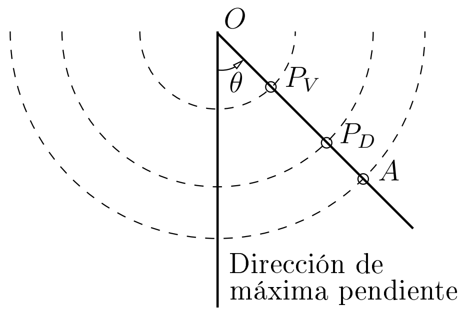
2.- La energía cinética se puede obtener como

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}A(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}C(\frac{3}{2}\dot{\theta})^2 = \frac{69}{64}ma^2\dot{\theta}^2.$$



Sea G_V el centro de masas de la varilla y G_D el del disco. Denotemos a sus proyecciones ortogonales al plano de rodadura por P_V y P_D, respectivamente. Observamos que las componentes verticales de $\overrightarrow{P_V G_V}$ y $\overrightarrow{P_D G_D}$ son invariantes durante el movimiento. Por tanto, su efecto resulta un término constante que podemos eliminar de la energía potencial tomando

$$V = \frac{m}{2}gz_{P_V} + \frac{m}{2}gz_{P_D},$$



siendo z_{P_V} y z_{P_D} las alturas de P_V y P_D respecto a O. Resulta

$$V = -\frac{m}{2}g\overline{OP_V}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,30^{\circ} - \frac{m}{2}g\overline{OP_D}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,30^{\circ} =$$
$$-\frac{9}{16}mga\cos(\theta),$$

obteniéndose la Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{69}{64}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{9}{16}mga\cos(\theta).$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{69}{32}ma^2\ddot{\theta} + \frac{9}{16}mga\,\mathrm{sen}(\theta) = 0.$$

3.- La energía total del sistema, cinética más potencial, es constante,

$$E = \frac{69}{64}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{9}{16}mga\cos(\theta).$$

La velocidad crítica $\dot{\theta}_0$ es aquella para la que se anula la velocidad en el instante en el que el sólido pasa a tener su centro de gravedad más elevado (energía potencial máxima), correspondiente a $\theta = 180^{\circ}$. Por tanto,

$$E = \frac{69}{64}ma^2\dot{\theta}_0^2 - \frac{9}{16}mga\cos 0^{\circ} = -\frac{9}{16}mga\cos 180^{\circ},$$

resultando

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{24}{23}\frac{g}{a}}.$$