Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

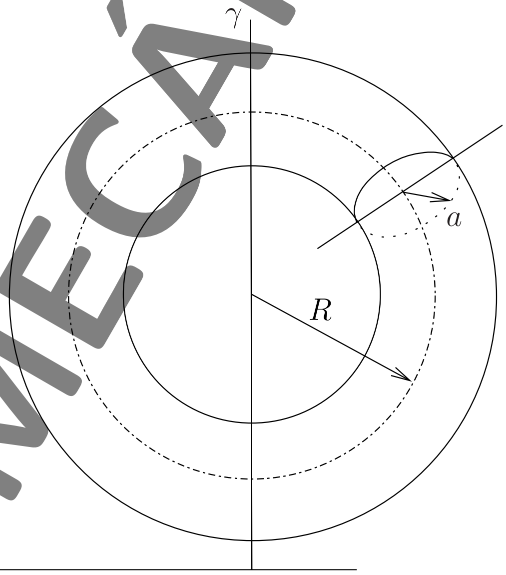
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (13 de junio de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

Una partícula pesada de masa m está obligada a moverse con ligadura bilateral lisa sobre una superficie toroidal cuya directriz es una circunferencia vertical fija de radio R, y su generatriz una circunferencia de radio a. Además del peso, sobre la partícula actúa una fuerza de repulsión proporcional a su masa y a su distancia a la recta vertical fija γ que pasa por el centro del toro, siendo $\beta > 0$ la constante de proporcionalidad.



Se pide:

1. Obtener la expresión del potencial de las fuerzas aplicadas sobre la partícula;

2. Calcular todas las posiciones de equilibrio de la partícula en función del valor de β.

⋆

1. El problema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante los ángulos θ y φ que se muestran en la Figura 1.

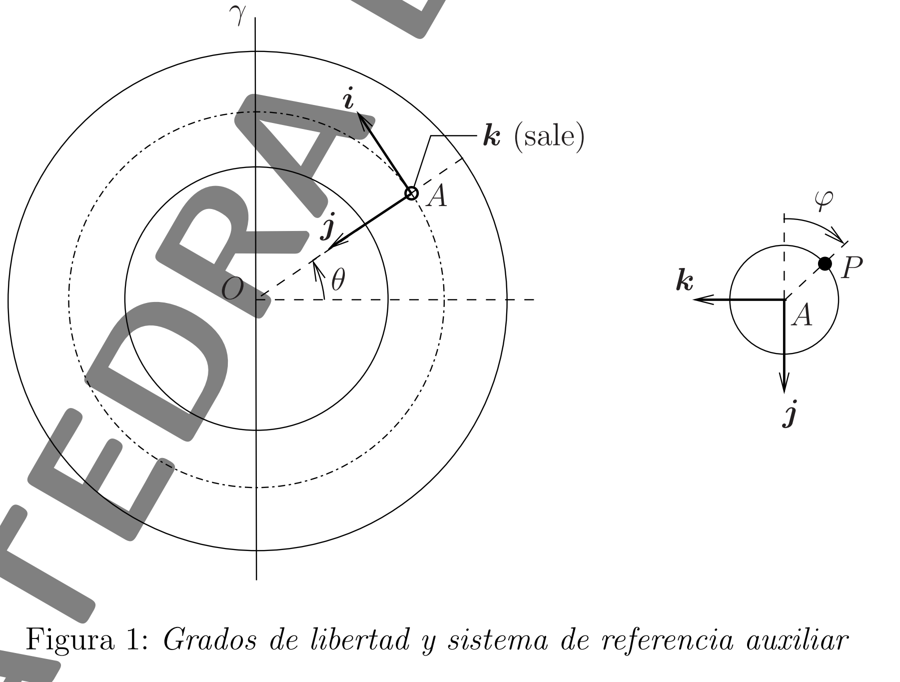


Figura 1: *Grados de libertad y sistema de referencia auxiliar*

Denotando por O al centro del toro y por A al centro de la sección del toro en la que se encuentra la partícula, θ es el ángulo que forma el segmento OA con la horizontal, y φ el ángulo que define la posición de la partícula P dentro de esa sección.

865exam.tex

El potencial de las fuerzas aplicadas tiene un término de origen gravitatorio y otro asociado a la fuerza de repulsión. Denotando por $\boldsymbol{K}$ al versor vertical fijo y $\boldsymbol{r}$ al vector posición de la partícula, el potencial se expresa como:

$$V = mg(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{K}) - \frac{1}{2}\beta m r_H^2 \qquad ; \qquad r_H = |\boldsymbol{r}_H| = |\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}| \tag{1}$$

donde se ha denotado por r_H al módulo de la componente horizontal del vector posición $\boldsymbol{r}$. Empleando el sistema de referencia auxiliar $\{A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ que se muestra en la Figura 1, los vectores que intervienen en (1) se expresan:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP} = -R\boldsymbol{j} - a\cos\varphi\boldsymbol{j} - a\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{K} &= \cos\theta\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

que introducidas en (1) y operando permiten obtener el potencial:

$$V = mg(R + a\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\beta m\left[(R + a\cos\varphi)^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\varphi\right] \tag{2}$$

2. Las posiciones de equilibrio se obtienen calculando los extremos del potencial (2), que conduce a las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad mg\cos\theta + \beta m(R + a\cos\varphi)\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 \quad\Rightarrow\quad -mga\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \beta m\cos^2\theta(R + a\cos\varphi)a\operatorname{sen}\varphi - \beta m a^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0 \tag{4}$$

donde se ha asumido que $R > a$, y por tanto $(R + a\cos\varphi) > 0$, para eliminar este factor de la ecuación (3).

Las soluciones de (3) y (4) son:

- $\cos\theta = 0 \longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Introduciendo esto en (4) se obtienen a su vez dos posibilidades:
  - $\operatorname{sen}\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0, \pi$
  - $\operatorname{sen}\varphi \neq 0$, que puede ser eliminado en (4) y conduce a $\varphi = \arccos(-g/(\beta a))$, que existe solo si $\beta \geq g/a$, y que corresponde a dos posiciones simétricas φ y $2\pi - \varphi$ en la sección.
- $\cos\theta \neq 0$, que puede ser eliminado en (3), obteniéndose:

$$mg + \beta m(R + a\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{5}$$

  Inspeccionando la ecuación (4) se obtienen dos posibilidades:
  - $\operatorname{sen}\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0, \pi$.
    El valor $\varphi = 0$, introducido en (5) conduce a la solución $\theta = \operatorname{arc\,sen}(-g/[\beta(R+a)])$, que solo existe para $\beta \geq g/(R + a)$, y que corresponde a dos posiciones θ y $\pi - \theta$ simétricas respecto de la recta γ.
    El valor $\varphi = \pi$, introducido en (5) conduce a la solución $\theta = \operatorname{arc\,sen}(-g/[\beta(R-a)])$, que solo existe para $\beta \geq g/(R - a)$, y que de nuevo corresponde a dos posiciones θ y $\pi - \theta$ simétricas respecto de la recta γ.

- $\operatorname{sen}\varphi \neq 0$. Esta opción no es posible, como se puede comprobar operando con (5) y la ecuación que resulta de eliminar $\operatorname{sen}\varphi$ en (4):

$$-mga\operatorname{sen}\theta + \beta m\cos^2\theta(R + a\cos\varphi)a - \beta ma^2\cos\varphi = 0 \tag{6}$$

  Concretamente, despejando $\operatorname{sen}\theta$ de (5) e introduciéndolo en (6) se llega a la condición $\beta R = 0$, que no es compatible con el enunciado.

En resumen, las posiciones de equilibrio son:

- Las posiciones que resultan de las combinaciones dos a dos de los valores $\theta = \pm\pi/2$ y $\varphi = 0, \pi$ son de equilibrio independientemente del valor de β.
- Para $\beta \geq g/(R + a)$ existen además unas nuevas posiciones de equilibrio dadas por $\theta = \arcsen(-g/[\beta(R + a)])$ y $\varphi = 0$.
- Para $\beta \geq g/a$ existen además unas nuevas posiciones de equilibrio dadas por $\theta = \pm\pi/2$ y $\varphi = \arccos(-g/(\beta a))$.
- Para $\beta \geq g/(R - a)$ existen además unas nuevas posiciones de equilibrio dadas por $\theta = \arcsen(-g/[\beta(R - a)])$ y $\varphi = \pi$.