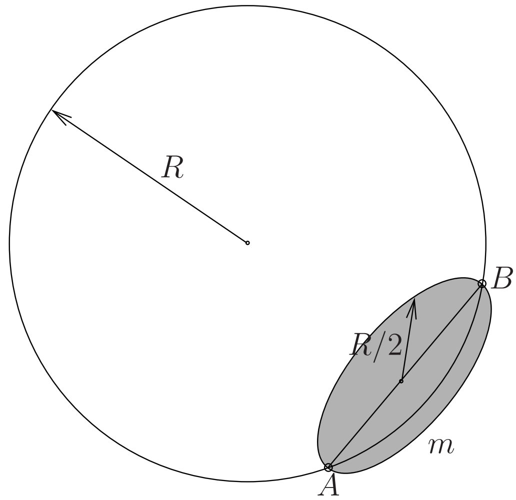
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (3 de julio del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado de masa m y diámetro R se mueve de forma que los extremos de uno de sus diámetros AB deslizan sobre una circunferencia vertical fija y lisa de radio R. El disco puede además girar libremente alrededor de este diámetro AB.



Se pide:

1. Expresión de la velocidad de rotación del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del disco y obtenerlas en su caso;
3. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;
4. Obtener las reacciones sobre el disco en A y B normales al plano del aro.

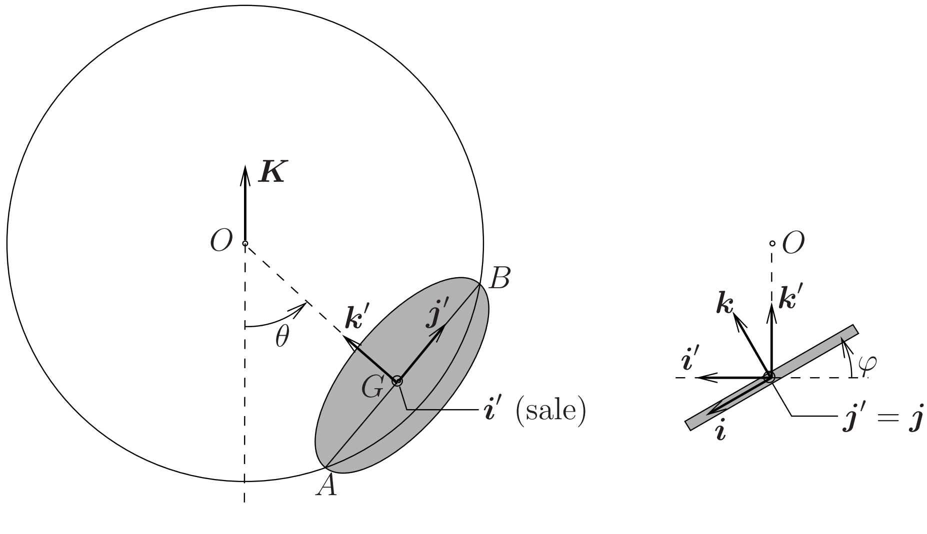


Figura 1: *Grados de libertad y sistemas de referencia auxiliares*

1.— El disco tiene dos grados de libertad, que podemos representar con el ángulo θ que sitúa el centro del disco en el plano de la circunferencia, y el ángulo φ que gira el disco alrededor del diámetro material AB.

También definimos por conveniencia dos sistemas de referencia auxiliares en G. El sistema móvil $\{G; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ se define de manera que $\boldsymbol{i}'$ es horizontal y $\boldsymbol{j}'$ lleva la dirección del diámetro

AB. El otro sistema $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es el *triedro del cuerpo*, ligado al disco y se encuentra girado un ángulo φ respecto del anterior. La velocidad de rotación del disco se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i}' + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

2.— La única integral primera del movimiento del disco es la conservación de la energía, ya que la única fuerza externa que trabaja es el peso, que es conservativo. La expresión es:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) - mg|\boldsymbol{OG}|\cos\theta\,, \tag{2}$$

donde las componentes del tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ en el triedro del cuerpo vienen dadas por:

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad , \quad \text{con} \quad C = 2A = \frac{1}{8}mR^2\,. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $|\boldsymbol{OG}| = R\sqrt{3}/2$ y que por tanto $v_G = \dot{\theta}R\sqrt{3}/2$, empleando las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene:

$$E = \frac{1}{32}mR^2\left[\dot{\theta}^2\left(13 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \dot{\varphi}^2\right] - mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\,. \tag{4}$$

3.— La integral primera (4) puede considerarse como una de las ecuaciones del movimiento. Se necesita pues otra ecuación para lo que puede tomarse una de las de Lagrange. La Lagrangiana L tiene la misma expresión que la energía E ya obtenida en (4) salvo el signo de la energía potencial. Las ecuaciones para θ y φ respectivamente resultan:

$$0 = \frac{1}{16}mR^2\ddot{\theta}\left(13 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{1}{8}mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta\,, \tag{5}$$

$$0 = \frac{1}{16}mR^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{16}mR^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2\,. \tag{6}$$

4.— Denotaremos a las componentes horizontales de la reacción en A y B normales al plano del aro como H_A y H_B, dirigidas ambas según el versor $\boldsymbol{i}'$. Las otras componentes de las reacciones son radiales, dirigidas hacia el centro de la circunferencia O puesto que ésta es lisa.

Puesto que no hay movimiento según $\boldsymbol{i}'$ perpendicular al plano de la circunferencia, ambas reacciones horizontales son iguales en módulo y de sentido contrario, es decir $H_B = -H_A$.

La ecuación adicional se puede obtener de varias maneras, desarrollamos dos de ellas a continuación.

1. Expresando el balance del momento cinético vertical en O, donde solo aparecen las reacciones horizontales normales al plano del aro:

$$\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{H}_O)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K})}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

   El momento resulta

$$\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{K} = (H_A R\,\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{K} = H_A R\cos\theta \tag{8}$$

   Por otro lado, el momento cinético en O se puede calcular con la expresión:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{v}_G\wedge\boldsymbol{r}_{GO}$$

Se observa que el vector $\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{r}_{GO}$ es horizontal, por lo que teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = -\cos\theta \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{k}$, la componente vertical resulta:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{16} m R^2 (\dot\theta \cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \dot\varphi \operatorname{sen}\theta)\,.$$

Teniendo en cuenta (7) y (8) y eliminando $\ddot\varphi$ gracias a la ecuación de Lagrange (6) las reacciones resultan finalmente:

$$H_A = -H_B = \frac{1}{16} m R \left(\ddot\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\cos^2\varphi\right)\,. \tag{9}$$

2. Otro procedimiento sería el balance de momento cinético en G según la dirección móvil $\boldsymbol{k}'$, que habrá que derivar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k}')}_{H_{z'}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{M}_G} \cdot \boldsymbol{k}' + \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}\,. \tag{10}$$

Desarrollando los términos de esta expresión:

$$H_{z'} = -A\dot\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + C\dot\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = A\dot\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,, \tag{11}$$
$$\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{k}' = H_A R\,, \tag{12}$$
$$\boldsymbol{H}_G \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = (A\dot\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + A\dot\varphi\,\boldsymbol{j} + C\dot\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}) \cdot (-\dot\theta\,\boldsymbol{j}) = -A\dot\theta\dot\varphi\,, \tag{13}$$

resulta finalmente

$$H_A = \frac{1}{16} m R \left(\ddot\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\cos^2\varphi\right)\,, \tag{14}$$

que como era de esperar coincide con el resultado anterior (9).