Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (15 de septiembre del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Deducir la expresión del balance de energía cinética en un sistema mecánico general sometido a un conjunto cualquiera de impulsiones, suponiendo que los vínculos internos son permanentes (es decir, las partículas del sistema que estaban unidas antes de la impulsión permanecen unidas). *Definir* el coeficiente de restitución del choque entre dos sólidos. *Aplicación:* Obtener la expresión del balance de energía para el caso del choque entre dos sólidos, en función del coeficiente de restitución. (5 ptos.)

Para una partícula de masa m, denotando la velocidad por $\boldsymbol{v}$ y la energía cinética por T, con los subíndices 1 y 2 para indicar las situaciones anterior y posterior al choque respectivamente, la variación de energía cinética es

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\cdot(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)\,.$$

Sumando para todas las partículas del sistema,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{I}_i \cdot [(\boldsymbol{v}_i)_2 + (\boldsymbol{v}_i)_1] \tag{1}$$

Si todas las impulsiones interiores provienen de vínculos permanentes (es decir, partículas que estaban unidas antes de la impulsión y permanecen unidas), los términos del sumatorio (1) debidos a ellas se anulan dos a dos, ya que ocurren en parejas del tipo

$$(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)\cdot(-\boldsymbol{I}) = 0\,.$$

Resulta por tanto bajo esta hipótesis

$$\boxed{T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{I}_i^{\text{ext}} \cdot [(\boldsymbol{v}_i)_2 + (\boldsymbol{v}_i)_1]\ .} \tag{2}$$

Coeficiente de Restitución.— Estudiamos dos cuerpos que chocan a través de sus puntos P y Q respectivamente. Sean las velocidades de dichos puntos $\boldsymbol{v}_P^1$ y $\boldsymbol{v}_Q^1$ (antes del choque) y $\boldsymbol{v}_P^2$, $\boldsymbol{v}_Q^2$ (después del choque). Admitiremos la hipótesis de que las ligaduras internas en cada cuerpo cumplen que son todas debidas a vínculos permanentes, lo que es válido por ejemplo en un sólido rígido. En el choque se produce una impulsión $\boldsymbol{I}$ sobre P, dirigida según el vector unitario $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{I} = I\boldsymbol{d}$), y la correspondiente impulsión reactiva $(-\boldsymbol{I})$ sobre Q.

Definimos:

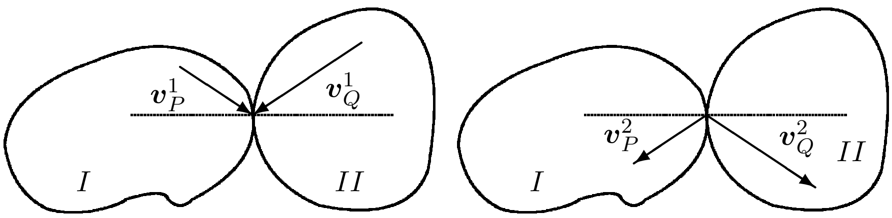

Figura 1: *Choque entre dos cuerpos I y II a través de sus puntos P y Q respectivamente; situaciones inmediatamente anterior y posterior al choque.*

> *«Coeficiente de restitución es el cociente, cambiado de signo, de las velocidades relativas de los puntos de impacto después y antes del choque, en la dirección de la impulsión:*
> $$e \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{(\boldsymbol{v}_P^2 - \boldsymbol{v}_Q^2)\cdot\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{v}_P^1 - \boldsymbol{v}_Q^1)\cdot\boldsymbol{d}} = -\frac{\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{d}} \text{ »}, \qquad (3)$$

donde $\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1$ son las velocidades relativas después y antes del choque, respectivamente.

El coeficiente de restitución lo podemos relacionar con la pérdida de energía cinética del sistema conjunto. Para ello expresemos el balance energético global. Para los cuerpos I y II son rerspectivamentye:

$$\begin{aligned} \Delta T_I &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_P^1 + \boldsymbol{v}_P^2)\cdot\boldsymbol{I}\,, \\ \Delta T_{II} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_Q^1 + \boldsymbol{v}_Q^2)\cdot(-\boldsymbol{I})\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

En estas expresiones se ha aplicado (2), que permite considerar tan sólo las impulsiones exteriores: $\boldsymbol{I}$ sobre el cuerpo I y $-\boldsymbol{I}$ sobre el II. Sin embargo, la evaluación de ΔT_I y ΔT_{II} corresponde a la energía cinética total de cada sólido, incluyendo la de rotación. Sumando ambas contribuciones,

$$\Delta T = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_P^1 - \boldsymbol{v}_Q^1) + (\boldsymbol{v}_P^2 - \boldsymbol{v}_Q^2)]\cdot\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{d}]I\,, \qquad (5)$$

y considerando, por la definición (3) del coeficiente de restitución, que $\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{d} = -e(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{d})$, resulta

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{I}(1-e)}\,. \qquad (6)$$