Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (15 de septiembre del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Un cilindro de radio $R/3$ tiene su eje de revolución según un diámetro de una esfera de radio R. El cilindro es fijo mientras que la esfera gira con velocidad angular ω constante alrededor de dicho eje de revolución. Otra esfera de radio $R/9$ se mueve permaneciendo tangente a la cara exterior del cilindro y a la cara interior de la otra esfera de radio R, rodando sin deslizar sobre ambas superficies. La velocidad del centro de la esfera pequeña tiene el mismo valor y sentido que la del punto de contacto de ambas esferas.

Para la esfera de radio $R/9$, se pide:

1. Razonar si el movimiento instantáneo corresponde a una rotación pura, definiendo el eje instantáneo del movimiento que corresponda.
2. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular.
3. Calcular la velocidad y aceleración del punto material más alto de dicha esfera.

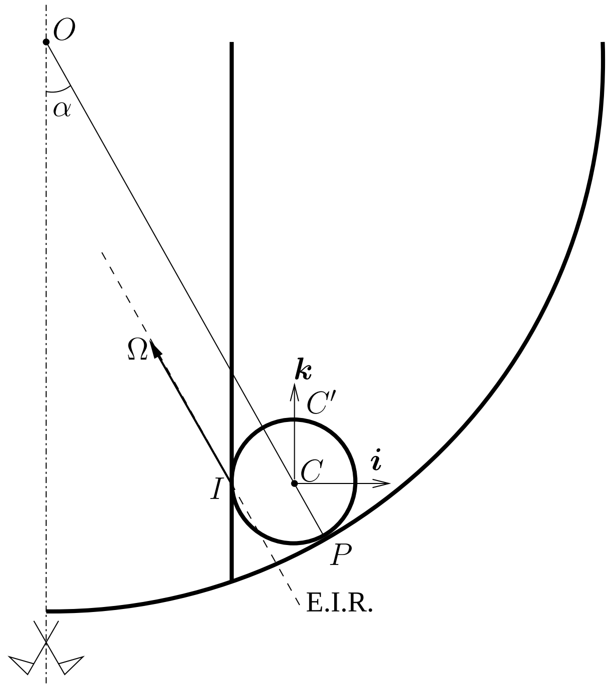
1.— En la figura se muestra un plano meridional que contiene las secciones principales del cilindro y de ambas esferas: la de radio R cuyo centro denominamos O y la de radio $R/9$ cuyo centro llamaremos C. El punto de contacto entre esta última y el cilindro es I, y el punto de contacto de las esferas es P.

Como la esfera rueda sin deslizar sobre el cilindro y éste es fijo, el movimiento de la esfera corresponde a una rotación instantánea en la que el eje pasa por el punto I.

Por otra parte, como las velocidades de C y de P tienen igual módulo y sentido el Eje Instantáneo de Rotación (E.I.R.) es paralelo al segmento CP.

El ángulo α que forma OP con el eje de revolución se obtiene a partir de la expresión:

$$R \operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{3} + \frac{R}{9} + \frac{R}{9}\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \qquad (1)$$



2.— De la condición de rodadura de ambas esferas, la velocidad del punto P es (ver ejes auxiliares de la figura):

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\omega R}{2}\boldsymbol{j} \qquad (2)$$

La velocidad angular pedida se puede obtener a partir de la velocidad del centro C de la esfera, que por la definición del movimiento dada en el enunciado es igual a $\boldsymbol{v}_P$:

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\omega R}{2}\boldsymbol{j}\,, \qquad (3)$$

y de la distancia del centro C al E.I.R, resultando:

$$\Omega = \frac{v_c}{\frac{R}{9}\cos\alpha} = 3\sqrt{3}\omega\,. \tag{4}$$

Expresando $\boldsymbol{\Omega}$ en los ejes auxiliares de la figura:

$$\boldsymbol{\Omega} = 3\sqrt{3}\omega\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}\right)\,. \tag{5}$$

La aceleración angular se obtiene derivando la velocidad angular (5). Para ello se debe tener en cuenta que los ejes de esta expresión giran con el plano meridional de la figura (que contiene las secciones principales y el eje de revolución) alrededor de dicho eje de revolución. La velocidad de rotación del plano meridional se puede obtener a partir del punto C del mismo, que coincide constantemente con el punto material centro de la esfera y cuya velocidad ya conocemos:

$$\boldsymbol{\omega}_P = \frac{v_C}{R/3 + R/9}\boldsymbol{k} = \frac{9\omega}{8}\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

La aceleración angular resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}_P \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\frac{27\sqrt{3}}{16}\omega^2\boldsymbol{j}\,. \tag{7}$$

3.— La velocidad del punto C' se obtiene mediante la aplicación directa de la expresión de campo de velocidades del sólido, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{CC'} = R/9\boldsymbol{k}$ y los resultados (3) y (5):

$$\boldsymbol{v}_{C'} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{CC'} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\omega R\boldsymbol{j}\,. \tag{8}$$

Análogamente la expresión de la aceleración de C' se obtiene a partir de la expresión del campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{a}_{C'} = \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{CC'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{CC'})\,. \tag{9}$$

Para calcular $\boldsymbol{a}_C$ se puede considerar que C describe una circunferencia de radio $4R/9$ con velocidad constante $v_c = \omega R/2$:

$$\boldsymbol{a}_C = -\frac{9\omega^2 R}{16}\boldsymbol{i}\,. \tag{10}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (9) y operando, resulta:

$$\boldsymbol{a}_{C'} = -\frac{9+15\sqrt{3}}{16}\omega^2 R\boldsymbol{i} - \frac{3}{4}\omega^2 R\boldsymbol{k}\,. \tag{11}$$