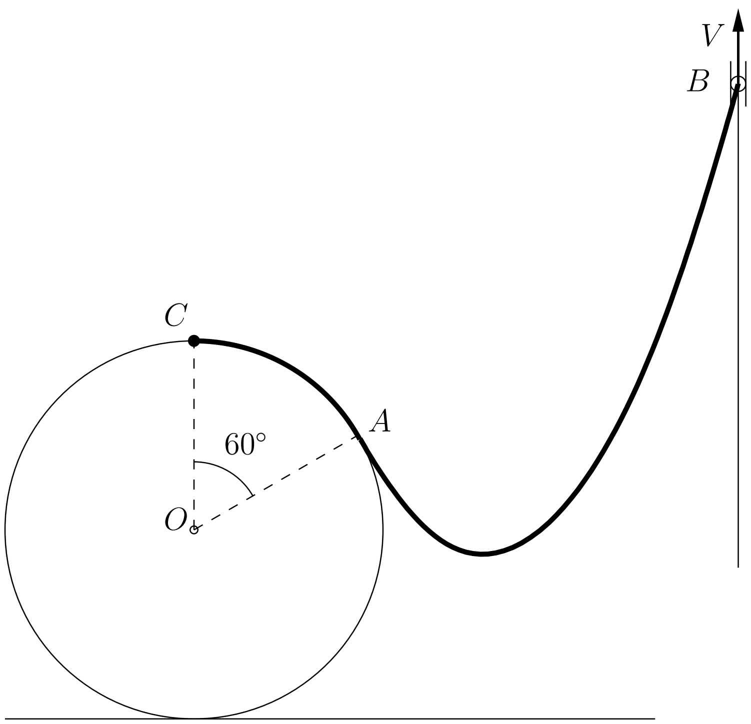
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (15 de septiembre del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

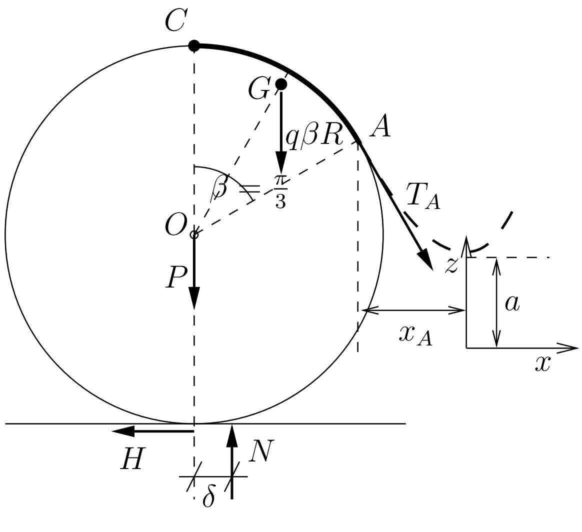
Ejercicio 4.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera un disco de radio R y peso $P = 9qR$ apoyado en una recta horizontal sobre la cual puede rodar sin deslizar, con resistencia a la rodadura definida por $\delta = R/5$. En el punto C de su perímetro está anclado un cable homogéneo CAB de peso unitario q, perfectamente flexible e inextensible y longitud total $5R$. Cuando el disco está en la posición de equilibrio estricto (a punto de rodar) C está en el punto superior del mismo y el ángulo que forma el punto A en que se separa el cable con OC es 60°. El otro extremo B del cable está ligado a una recta vertical, en la cual se sujeta mediante una fuerza vertical V. Se pide:



1. Tensión del cable en el punto A y reacciones de la recta sobre el disco.
2. Distancia horizontal y vertical entre los puntos A y B.
3. Tensión en B y valor de la fuerza V aplicada.

1.— En la figura se muestra el diagrama de fuerzas exteriores sobre el sistema formado por el disco y el tramo de cable CA. En la situación de equilibrio estricto frente a la rodadura la normal N se adelanta δ respecto a la vertical por el centro del disco O. Las acciones exteriores debidas al cable son la tensión T_A producida por el tramo «cortado» AB y el peso del tramo CA. Denominando $\beta = \pi/3$ rad al ángulo, este peso vale $q\beta R$ y lo podemos considerar aplicado en su centro de masas G. La distancia del centro de masas de un arco circular al centro del disco se calcula fácilmente integrando o mediante el teorema de Guldin y resulta



$$\overline{OG} = R\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} = R\frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\pi/6}\,.$$

Planteando las ecuaciones cardinales de equilibrio se obtiene

$$H = T_A \cos\beta \tag{1}$$
$$N = P + T_A \operatorname{sen}\beta + q\beta R \tag{2}$$
$$N\delta = HR + T_A R + q\beta R \cdot R\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\operatorname{sen}(\beta/2) = HR + T_A R + qR^2(1-\cos\beta)\,. \tag{3}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen la tensión en A y las reacciones:

$$T_A = qR\frac{13 + 2\pi/3}{15-\sqrt{3}} = 1{,}13766qR \tag{4}$$
$$H = qR\frac{13/2 + \pi/3}{15-\sqrt{3}} = 0{,}56883qR \tag{5}$$
$$N = qR\frac{5(27+\pi-\sqrt{3}/2)}{15-\sqrt{3}} = 11{,}03244qR\,. \tag{6}$$

2.— El cable AB forma una catenaria cuyo vértice estará situado a una determinada distancia x_A del extremo A, de ecuación $z = a\cosh(x/a)$, en unos ejes situados una distancia a por debajo del vértice (figura anterior). La tensión horizontal del cable y el parámetro de la catenaria se obtienen directamente a partir de (4):

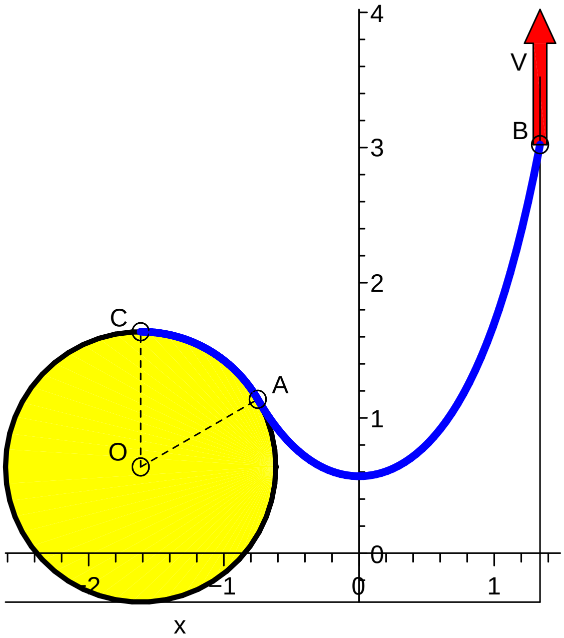
$$T_0 = T_A\cos\beta = H = qR\frac{13/2+\pi/3}{15-\sqrt{3}} = 0{,}56883qR \tag{7}$$
$$a = \frac{T_0}{q} = R\frac{13/2+\pi/3}{15-\sqrt{3}} = 0{,}56883R\,. \tag{8}$$

Sabiendo que la tensión en el cable vale $T = qz$, obtenemos las coordenadas de A:

$$z_A = \frac{T_A}{q} = R\frac{13+2\pi/3}{15-\sqrt{3}} = 1{,}13766R \tag{9}$$
$$x_A = a\operatorname{argcosh}\frac{z_A}{a} = R\frac{13/2+\pi/3}{15-\sqrt{3}}\operatorname{argcosh}(2) = 0{,}74912R\,. \tag{10}$$

Empleando el dato de la longitud del cable y sabiendo que el arco de catenaria desde el vértice vale $s = a\operatorname{senh}(x/a)$ obtenemos las coordenadas de B:

$$s_A = \frac{T_A\operatorname{sen}\beta}{q} = R\frac{(13/2+\pi/3)\sqrt{3}}{15-\sqrt{3}} = 0{,}98524R \tag{11}$$
$$s_B = 5R - s_A - \frac{\pi}{3}R = 2{,}96756R \tag{12}$$
$$x_B = a\operatorname{argsenh}\frac{s_B}{a} = 1{,}33909R \tag{13}$$
$$z_B = a\cosh\frac{x_B}{a} = 3{,}02159R\,. \tag{14}$$



Las distancias pedidas resultan pues

$$x_{AB} = x_B + x_A = 2{,}08822R\,; \tag{15}$$
$$z_{AB} = z_B - z_A = 1{,}88393R\,. \tag{16}$$

3.— Finalmente, la tensión en B y su componente vertical V se obtienen directamente a partir de los resultados anteriores:

$$T_B = qz_B = 2{,}08822qR\,;\quad V = qs_B = 2{,}96756qR\,. \tag{17}$$