Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

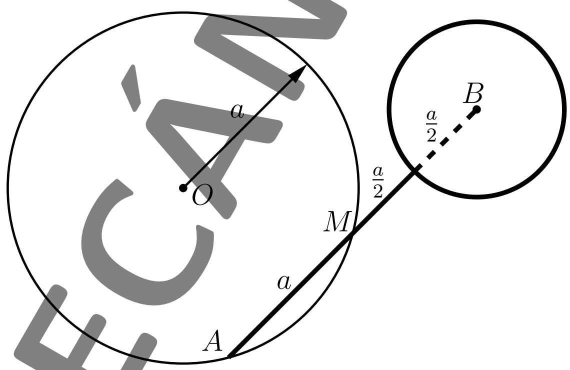
# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (15 de septiembre de 2008)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 5.º* (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido pesado está formado por una varilla $AB$ de masa $m$ y longitud $2a$, y una esfera maciza de la misma masa con centro $B$ y radio $a/2$. El sólido se mueve manteniendo el extremo $A$ y el punto medio de la varilla $M$ deslizando sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio $a$.




Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, y seleccionar un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas.
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sistema y obtener las expresiones de las mismas.
3. Determinar las reacciones sobre la varilla en $A$ y en $M$, en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas.

---

**1.** El sólido tiene 2 grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo $\theta$ que sitúa el punto $C$ centro del segmento $AM$ dentro de la circunferencia vertical, y el giro $\varphi$ del sólido alrededor de la varilla $AB$.

**2.** Existen dos integrales primeras, que proporcionan directamente las ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido.

Por un lado, se conserva la proyección del momento cinético en el centro de masa $G$ (en el punto medio del segmento $MB$) según la dirección de la varilla, ya que las fuerzas exteriores (peso y reacciones) no dan momento según esa dirección, que es el eje de revolución del sólido:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{AB} = cte. \qquad (1)$$

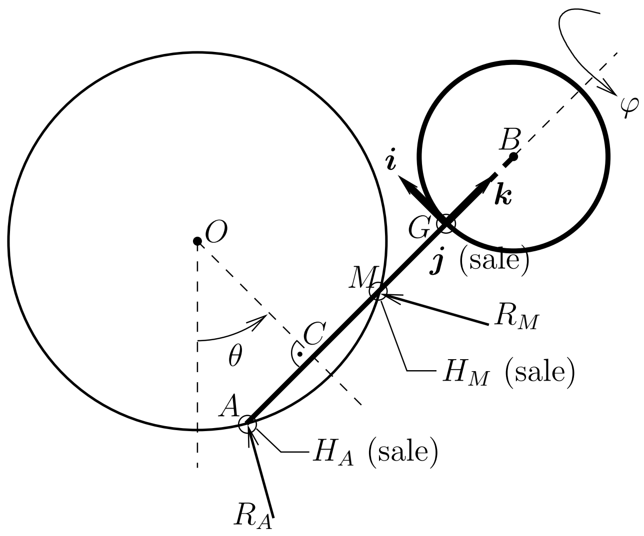



Figura 1: *Grados de libertad*

Por otro lado, se conserva la energía total del sistema, ya que la única fuerza que trabaja es el peso, que es conservativo.

$$E = T + V = cte. \qquad (2)$$

Por conveniencia para obtener las expresiones correspondientes definimos un sistema de referencia auxiliar $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla e $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a ésta en el plano de la circunferencia. En este sistema la velocidad angular del sólido se expresa como $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ y el tensor central de inercia:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{2}{20}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{14}{15}ma^2, \quad C = \frac{1}{10}ma^2$$

de forma que la integral primera (1) resulta:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = C\dot{\varphi} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = cte.$$

Teniendo en cuenta que la velocidad del punto $C$ es $\boldsymbol{v}_C = a\dot{\theta}\sqrt{3}/2\,\boldsymbol{k}$, la velocidad del centro de masa se puede calcular:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{CG} = a\dot{\theta}\boldsymbol{i} + a\dot{\theta}\sqrt{3}/2\,\boldsymbol{k}$$

con lo que la segunda ecuación del movimiento resulta:

$$E = T + V = \frac{1}{2}2m\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) + V = \frac{1}{20}ma^2\left(\frac{133}{3}\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) - mga(\sqrt{3}\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta) = cte.$$

**3.** Las reacciones en $A$ y en $M$ tienen cada una dos componentes: una radial $(R_A, R_M)$ en el plano de la circunferencia y otra perpendicular al plano de ésta $(H_A, H_M)$, como muestra la Figura 1.

El planteamiento del principio de cantidad de movimiento según la varilla y una dirección perpendicular a ésta en el plano de la circunferencia permite obtener las componentes radiales. Teniendo en cuenta que $G$ se encuentra en la varilla, que tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{j}$ y aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\theta}\boldsymbol{j}$, y que la aceleración del punto $C$ es $\boldsymbol{a}_C = a\ddot{\theta}\sqrt{3}/2\;\boldsymbol{k} + a\dot{\theta}^2\sqrt{3}/2\boldsymbol{i}$, se obtiene la aceleración del centro de masa (que tiene un movimiento plano):

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_M + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{CG} - \omega^2\boldsymbol{CG} = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}^2 + a\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{i} + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{k}$$

Por otro lado, las fuerzas exteriores al sólido son:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}(R_A + R_M)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(R_A - R_M)\boldsymbol{k} + (H_A + H_M)\boldsymbol{j} - 2mg(\cos\theta\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{k})$$

Planteando $\boldsymbol{F} = 2m\boldsymbol{a}_G$ según $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$ se obtienen las componentes radiales:

$$R_A = \frac{5}{\sqrt{3}}ma\ddot{\theta} - ma\dot{\theta}^2 + 2mg\left(\mathrm{sen}\;\theta + \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

$$R_M = -\frac{1}{\sqrt{3}}ma\ddot{\theta} + 3ma\dot{\theta}^2 - 2mg\left(\mathrm{sen}\;\theta - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

y en la dirección $\boldsymbol{j}$ se obtiene $H_A = -H_M$. Es posible obtener una ecuación adicional planteando el principio del momento cinético en $G$ según $\boldsymbol{i}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{i}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{i} = H_A 3a/2 + H_M a/2$, y que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{i})}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0 + C\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

resulta $H_A = -H_M = ma\dot{\theta}\dot{\varphi}/10$.