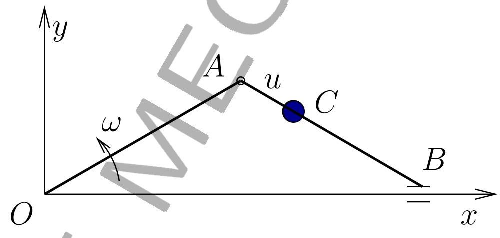
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (5 de diciembre del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

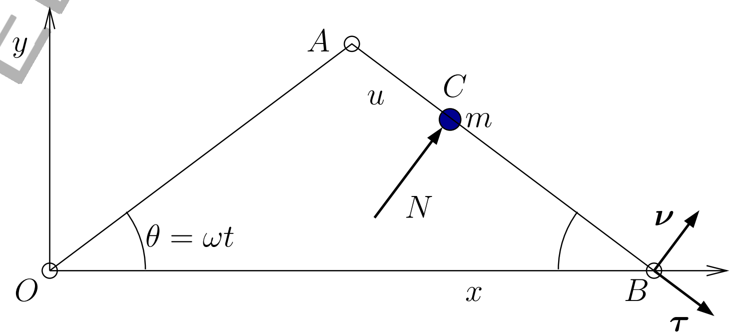
Ejercicio 2.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB de longitud a se mueve en un plano vertical, de modo que su extremo B desliza sobre el eje Ox. El otro extremo A está articulado a otra varilla OA, de la misma longitud a y que gira alrededor de O con velocidad angular ω constante. Sobre AB se halla ensartada con ligadura bilateral lisa una partícula pesada C de masa m. La distancia $\overline{AC} = u$ define la posición de la partícula en un instante genérico. Se pide



1. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula.
2. Reacción de la varilla AB sobre la partícula en un instante genérico, en función de u y sus derivadas.
3. Integrar completamente la ecuación diferencial del movimiento, con las condiciones iniciales $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$.

1.— En primer lugar observamos en la figura que el triángulo AOB formado por las varillas es isósceles, siendo iguales los ángulos $\angle AOB = \angle ABO = \theta = \omega t$. Para la ecuación de la dinámica obtenemos primero la aceleración de m empleando la descomposición del movimiento relativo a la varilla AB,



$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} \,. \qquad (1)$$

La varilla AB tiene velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = -\omega\,\boldsymbol{k}$ y aceleración angular nula, $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$. Expresando las componentes en función de las direcciones móviles $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ resulta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BC}) = -2a\omega^2 \cos\theta\,\boldsymbol{i} + (a-u)\omega^2\boldsymbol{\tau} = -(a\cos 2\theta + u)\omega^2\boldsymbol{\tau} - a\omega^2 \operatorname{sen} 2\theta\,\boldsymbol{\nu} \\
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= \ddot{u}\,\boldsymbol{\tau} \\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = -2\omega\dot{u}\,\boldsymbol{\nu}\,,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\boldsymbol{a} = (-a\omega^2\cos 2\theta - u\omega^2 + \ddot{u})\boldsymbol{\tau} - (a\omega^2 \operatorname{sen} 2\theta + 2\omega\dot{u})\boldsymbol{\nu}\,. \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que la única fuerza en dirección $\boldsymbol{\tau}$ es la proyección del peso, $mg\operatorname{sen}\theta$, resulta la ecuación

$$\boxed{\ddot{u} - u\omega^2 = a\omega^2\cos 2\omega t + g\operatorname{sen}\omega t\,.} \qquad (3)$$

2.— Para obtener la reacción $N\boldsymbol{\nu}$ consideramos que la componente del peso en dirección $\boldsymbol{\nu}$ es $-mg\cos\theta$, por lo que

$$\boxed{N = ma_\nu + mg\cos\theta = -m(a\omega^2 \operatorname{sen} 2\omega t + 2\omega\dot{u}) + mg\cos\omega t\,.} \tag{4}$$

3.— La solución a la ecuación diferencial (3) se descompone en la solución general de la homogénea más una particular de la completa,

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)\,. \tag{5}$$

La solución particular es

$$u_p(t) = B_1\cos 2\omega t + B_2 \operatorname{sen}\omega t\,, \tag{6}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se obtienen los coeficientes $B_1 = -a/5$,$B_2 = -g/(2\omega^2)$. La solución de la homogénea es

$$u_h(t) = A_1 \operatorname{senh}\omega t + A_2\cosh\omega t\,, \tag{7}$$

en función de los coeficientes (A_1, A_2). Estos se obtienen obligando a que se cumplan las condiciones iniciales:

$$u(0) = A_2 - \frac{a}{5} \qquad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{a}{5}\,; \tag{8}$$

$$\dot{u}(0) = A_1\omega - \frac{g}{2\omega} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{g}{2\omega^2}\,; \tag{9}$$

por lo que resulta finalmente

$$\boxed{u(t) = \frac{g}{2\omega^2}(\operatorname{senh}\omega t - \operatorname{sen}\omega t) + \frac{a}{5}(\cosh\omega t - \cos 2\omega t)\,.} \tag{10}$$