Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (5 de diciembre del 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

Una placa triangular equilátera ABC, de lado b, se mueve en el espacio respecto de un sistema de referencia fijo $OXYZ$ de forma que:

a) El vértice A recorre un segmento del eje OZ siguiendo la ley $z_A = b \operatorname{sen} \omega t$, siendo ω una constante dada.

b) El vértice B permanece sobre el plano XOY, moviéndose con velocidad de módulo constante. En el momento inicial, está sobre el eje OY.

c) El plano de la placa permanece normal al plano XOY.

Se pide:

1. Demostrar que la velocidad de rotación instantánea tiene módulo constante Ω, cuyo valor se calculará.
2. Demostrar que el vector velocidad de rotación instantánea forma con el eje OZ un ángulo constante ψ, cuyo valor se calcular.
3. Situar el eje helicoidal tangente en un instante genérico.
4. Encontrar la velocidad y aceleración del vértice C en un instante genérico.
5. Encontrar la trayectoria de B.

⋆

1.— De la condición *a)* se deduce que el segmento AB forma un ángulo $\theta = \omega t$ con el plano XOY, es decir que gira con velocidad ω dentro del plano OAB, plano normal a XOY y en el que está contenida la placa. El eje de esta rotación corta al plano dicho en el punto I que sería el centro instantáneo de rotación dentro del plano, y la velocidad de rotación es $\omega \boldsymbol{\beta}$, siendo $\boldsymbol{\beta}$ un versor normal al plano OAB (véase figura 1).

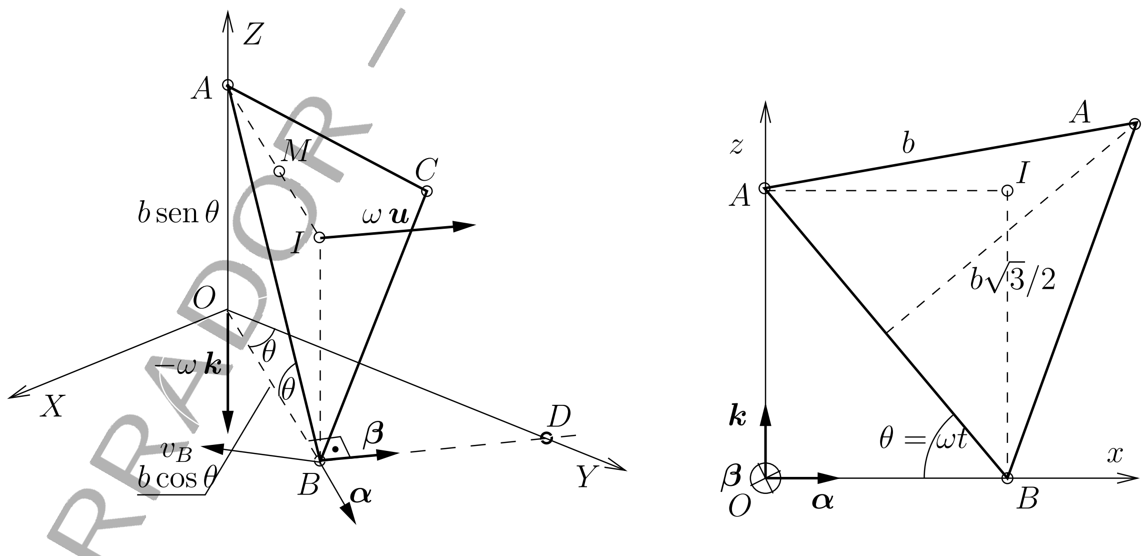


Figura 1: Croquis de la placa en perspectiva y en en plano OAB en verdadera magnitud

Se deduce inmediatamente que la velocidad de B inducida por esta rotación es $b\omega \operatorname{sen}\theta$ en la dirección de BO. Además de este movimiento, B puede moverse en el plano XOY con otra componente de la velocidad en dirección normal a BO, que provendría de una rotación alrededor de OZ. Considerando $\overline{OB} = \rho = b\cos\omega t$, denominando φ al ángulo girado en esta rotación e imponiendo la condición *b)* del enunciado de que sea constante $v_B = k$,

$$b^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\omega t + \dot{\varphi}^2 b^2 \cos^2\omega t = k^2 \quad \Rightarrow \quad b^2(\dot{\varphi}^2 - \omega^2)\cos^2\omega t = k^2 - b^2\omega^2\,. \tag{1}$$

La solución de esta ecuación[1] es $\dot{\varphi} = \omega$ y $v_B = b\omega$. En definitiva la otra componente de la velocidad será $b\omega\cos\theta$, de forma que la velocidad de B será $b\omega$. Este movimiento adicional es simplemente una rotación ω alrededor del eje OZ. Por tanto el movimiento del segmento AB puede interpretarse como la composición de las rotaciones $\omega\,\boldsymbol{\beta}$ (por I) y $-\omega\,\boldsymbol{k}$ (por O):

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{\beta} - \omega\,\boldsymbol{k} = \omega(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{k}) \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega\sqrt{2}\,. \tag{2}$$

(El signo negativo de $-\omega\,\boldsymbol{k}$ se toma por conveniencia del dibujo, sería igualmente válido tomar signo positivo.)

Puesto que la placa ABC permanece normal a XOY su velocidad de rotación es la misma que la antes expresada para AB (2). (Si la placa no permaneciese en el plano vertical podría haber otra rotación alrededor de AB.)

2.— De la ecuación (2) se deduce inmediatamente que el vector $\boldsymbol{\Omega}$ forma constantemente el ángulo $\pi/4$ con OZ.

3.— El movimiento instantáneo es la composición de dos rotaciones que se cruzan ortogonalmente. La dirección del EHT es la de $\boldsymbol{\Omega}$ definida en (2). El segmento de mínima distancia entre los ejes de las rotaciones es IA, y puesto que ambas tienen igual valor el EHT cortará a dicho segmento en su punto medio M (véase figura 1).

4.— La velocidad de C se calcula mediante la expresión general:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AC} \\
&= b\omega\cos\theta\,\boldsymbol{k} + \omega(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{k})\wedge\frac{b}{2}[(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{\alpha} + (-\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\boldsymbol{k}] \\
&= \frac{b}{2}\omega(-\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\boldsymbol{\alpha} - \frac{b}{2}\omega(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{\beta} - \frac{b}{2}\omega(\cos\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k} \\
&= b\omega\operatorname{sen}(\pi/3-\theta)\boldsymbol{\alpha} - b\omega\cos(\pi/3-\theta)\boldsymbol{\beta} + b\omega\cos(\pi/3+\theta)\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

La aceleración se calcula también mediante la expresión general

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{AC} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AC})\,, \tag{4}$$

teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{a}_A = -b\omega^2\operatorname{sen}\theta\,, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\omega\,\boldsymbol{k}\wedge\omega(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{k}) = \omega^2\boldsymbol{\alpha}\,, \tag{5}$$

se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_C &= -b\omega^2(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{\alpha} - b\omega^2(-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2}b\omega^2(\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\boldsymbol{k}\,. \\
&= -2b\omega^2\cos(\pi/3-\theta)\boldsymbol{\alpha} - 2b\omega^2\operatorname{sen}(\pi/3-\theta)\boldsymbol{\beta} - b\omega^2\operatorname{sen}(\pi/3+\theta)\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{6}$$

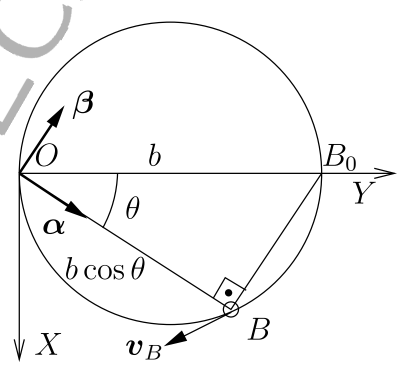
[1] La ecuación anterior admite formalmente otras soluciones del tipo $\dot{\varphi}^2 - \omega^2 = \gamma^2\omega^2/\cos^2\omega t$, en cuyo caso la velocidad constante sería $v_B = \sqrt{1+\gamma^2}b\omega$, aunque estas no podrían considerarse válidas ya que son singulares en $\omega t = \pi/2$.

Otra forma de realizar estos cálculos es derivando directamente la expresión general de la posición de C en cartesianas:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_C &= b\cos(\pi/3-\theta)\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + b\cos(\pi/3-\theta)\cos\theta\,\boldsymbol{j} + b\operatorname{sen}(\pi/3+\theta)\,\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v}_C &= b\omega\cos(\pi/3-2\theta)\,\boldsymbol{i} + b\omega\operatorname{sen}(\pi/3-2\theta)\,\boldsymbol{j} + b\omega\cos(\pi/3+\theta)\,\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{a}_C &= 2b\omega^2\operatorname{sen}(\pi/3-2\theta)\,\boldsymbol{i} - 2b\omega^2\cos(\pi/3-2\theta)\,\boldsymbol{j} - b\omega^2\operatorname{sen}(\pi/3+\theta)\,\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

5.— Conociendo la distancia $\overline{OB} = b\cos\theta$ podemos escribir directamente la expresión de la coordenada de B en polares:

$$\rho = b\cos\theta\,, \tag{8}$$



que al variar $\theta = \omega t$ define una circunferencia que pasa por el origen. También podemos comprobarlo expresando las coordenadas cartesianas,

$$X_B = b\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{2}\operatorname{sen}2\theta\,;\quad Y_B = b\cos^2\theta = \frac{b}{2}(1+\cos 2\theta)\,, \tag{9}$$

que definen una circunferencia de centro $(0, b/2, 0)$ y radio $b/2$.

También podríamos haber empleado el razonamiento geométrico de que desde B el segmento OB_0 se ve bajo un ángulo de $\pi/2$, por lo que la trayectoria será la circunferencia de diámetro $OB_0 = b$.