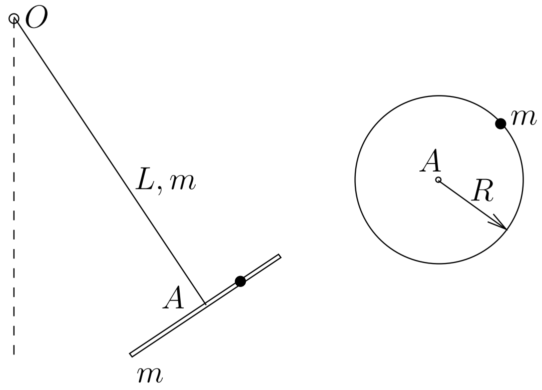
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de Diciembre de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido pesado está formado por una varilla OA de longitud L y masa m soldada perpendicularmente al centro de un disco homogéneo de radio R y masa m. Además, soldada al borde del disco se encuentra una partícula pesada de masa m. El extremo O está articulado a un punto fijo, de forma que la varilla está obligada a moverse en un plano vertical fijo que pasa por O, estando libres el resto de los movimientos posibles. Se pide

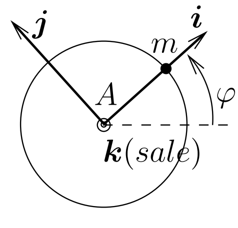


1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sólido;
2. Obtener las ecuaciones del movimiento del sólido;
3. Obtener el momento necesario a aplicar en O para que la velocidad de rotación de la varilla en el plano vertical fijo tenga un valor ω constante.

⋆

1. El sólido tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo θ que forma la varilla OA con la vertical descendente, y el giro φ del sólido alrededor de la varilla.

Por conveniencia definimos un sistema de referencia ligado al sólido $\{A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección del segmento que une el centro del disco con la partícula, $\boldsymbol{j}$ es perpendicular al anterior en el plano del disco, y $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla, formando un triedro a derechas.



La única integral primera que existe es la conservación de la energía total, ya que la única fuerza que trabaja (el peso) es conservativa.

2. Teniendo en cuenta que la única fuerza aplicada (el peso) deriva de un potencial, podemos calcular la función Lagrangiana $L = T - V$ y obtener a partir de ella una ecuación del movimiento, que junto a la expresión de la integral primera de la energía forman las dos ecuaciones de la dinámica del sólido.

Teniendo en cuenta que el sólido tiene un punto fijo, la energía cinética se puede calcular como $T = (1/2)\,\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O \boldsymbol{\Omega}$, siendo:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi \boldsymbol{i} - \dot{\theta} \cos \varphi \boldsymbol{j} + \dot{\varphi} \boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ D & 0 & C \end{pmatrix} \quad , \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \frac{7}{3}mL^2 + \frac{1}{4}mR^2 \\ B = \frac{7}{3}mL^2 + \frac{5}{4}mR^2 \\ C = \frac{3}{2}mR^2 \\ D = mRL \end{cases} \tag{2}$$

Por otro lado, el potencial gravitatorio, con origen en el plano horizontal que pasa por O, se expresa como:

$$V = -\frac{5}{2}mgL\cos\theta + mgR\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

Empleando las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene la expresión de la energía total del sólido, que es una de las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} E = T + V = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}mL^2 + \frac{1}{4}mR^2 + mR^2\cos^2\varphi\right)\dot{\theta}^2 - mRL\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \\ + \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{5}{2}mgL\cos\theta + mgR\cos\varphi\operatorname{sen}\theta = cte. \end{aligned} \tag{4}$$

La otra ecuación del movimiento se puede obtener formando la función Lagrangiana (en la práctica, simplemente cambiando el signo del potencial en (4)). Por ejemplo, la ecuación correspondiente a φ resulta:

$$-mRL\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} + mR^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - mgR\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi = 0$$

o alternativamente la ecuación en θ, que resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{3}mL^2 + \frac{1}{4}mR^2 + mR^2\cos^2\varphi\right)\ddot{\theta} - 2mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - mRL\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \\ - mRL\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{5}{2}mgL\operatorname{sen}\theta + mgR\cos\varphi\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

3. El par necesario para $\dot{\theta} = \omega = cte.$ será una fuerza generalizada Q_θ, que se obtiene directamente de particularizar la ecuación (5) para $\theta = \omega t$ (suponiendo que en instante inicial la varilla está en la vertical descendente):

$$Q_\theta = -2mR^2\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - mRL\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - mRL\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{5}{2}mgL\operatorname{sen}\omega t + mgR\cos\varphi\cos\omega t$$