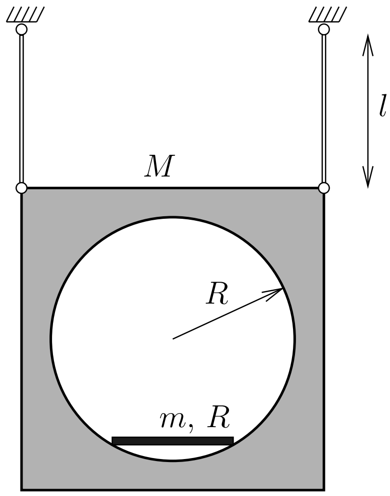
Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (13 de marzo de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada de masa M está articulada por dos de sus vértices a sendos puntos fijos mediante dos varillas de longitud l y masa despreciable, permaneciendo en un plano vertical. La placa tiene en su centro un hueco de forma circular de radio R, por el que se mueve con ligadura bilateral lisa una varilla de masa m y longitud R (ver en la figura la posición del sistema en reposo).
Asimismo sobre la placa se produce una resistencia viscosa del medio cuya resultante equivale a una fuerza proporcional a la velocidad de la placa aplicada en su centro, con constante c.

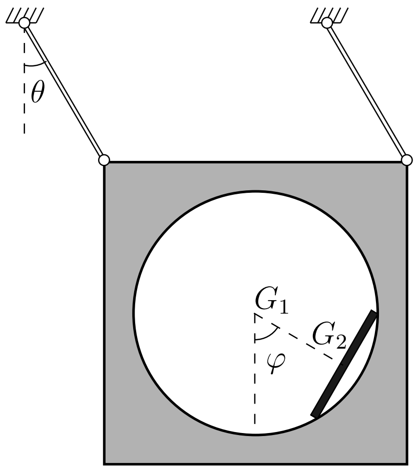


1. Ecuaciones diferenciales de la dinámica, suponiendo el movimiento más general posible.

2. Discutir la existencia de integrales primeras y, en su caso, expresarlas.

---

1. Tomamos como coordenadas generalizadas los ángulos θ y φ, correspondientes a los giros absolutos de las varillas sin masa y de la varilla de masa m y longitud R, respectivamente. Dado que el movimiento de la placa corresponde a un traslación circular, su energía cinética se obtiene con la velocidad de su centro de masas G_1:



$$T_{\text{placa}} = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

La energía cinética de la varilla se obtiene a partir de la velocidad de su centro de masas G_2 y de su velocidad angular $\dot{\varphi}$, aplicando el teorema de Koenig:

$$T_{\text{varilla}} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}R^2\dot{\varphi}^2 + \sqrt{3}lR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)) + \frac{1}{24}mR^2\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

La energía potencial de sistema se calcula sumando la energía potencial de la placa y de la varilla. Obviando los términos constantes:

$$V = -Mgl\cos\theta - mg(l\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\varphi) \tag{3}$$

La función Lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(M+m)l^2\dot{\theta}^2 + \frac{5}{12}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mlR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) + (M+m)gl\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR\cos\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

Las fuerzas generalizadas correspondientes a la resistencia viscosa se calcula mediante el trabajo virtual de la misma. La fuerza de resistencia viscosa es $\boldsymbol{F}_v = -cl\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta$. Considerando desplazamientos virtuales arbitrarios $(\delta\theta, \delta\varphi)$ el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es $\delta\boldsymbol{r}_{G_1} = l\delta\theta\,\boldsymbol{u}_\theta$, por lo que:

$$\delta W = -cl^2\dot{\theta}\delta\theta \quad \Rightarrow \quad Q_\theta = -cl^2\dot{\theta}, \quad Q_\varphi = 0\,. \tag{5}$$

Finalmente, operando en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q_\theta\,; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi\,, \tag{6}$$

se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$(M+m)l^2\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{3}}{2}mlR\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}mlR\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + (M+m)gl\operatorname{sen}\theta = -cl^2\dot{\theta} \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mlR\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + \frac{5}{6}mR^2\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}mlR\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR\operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{8}$$

2. No existen integrales primeras del movimiento. Dado que la resistencia viscosa es una fuerza no conservativa, no se conserva la energía mecánica del sistema. Tampoco se conserva la integral de Jacobi dado que la función Lagrangiana es parcial debido a la existencia de fuerzas no conservativas. Finalmente, no hay coordenadas cíclicas ya que las dos coordenadas generalizadas del sistema aparecen explícitamente en la función Lagrangiana, por lo que no existen integrales primeras asociadas a las mismas.