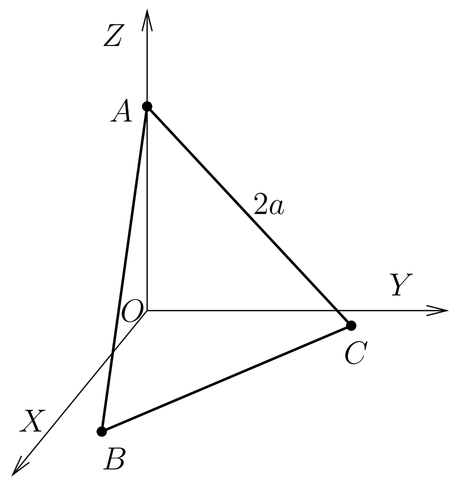
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (13 de marzo del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación 10/30) Tiempo: 60 min.

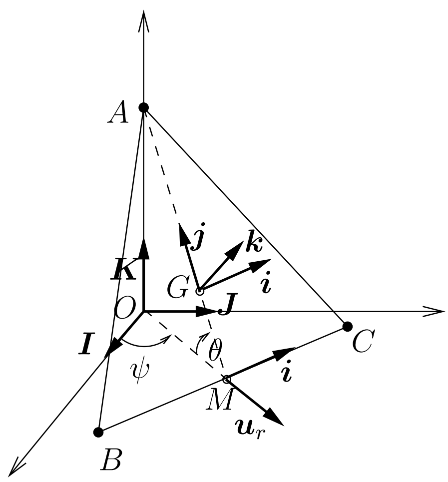
Una placa triangular homogénea ABC, equilátera de lado $2a$ y masa m, se mueve de forma que el vértice A permanece sobre el eje vertical fijo OZ, sin rozamiento. Además el lado BC permanece apoyado sobre el plano horizontal también liso OXY, siendo el movimiento de la placa el más general posible. Se pide:



1. Calcular el tensor central de inercia de la placa y expresión de la energía total en un instante genérico, en función de los grados de libertad y sus derivadas. (Se da el dato del momento de inercia de un triángulo respecto de uno de sus lados, $I = mh^2/6$, siendo m la masa y h la altura.)
2. Expresión del momento cinético del sólido respecto del eje OZ, en un instante genérico.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y calcularlas en su caso, sabiendo que en el instante inicial la velocidad de A es nula, la velocidad de rotación alrededor del eje OZ vale ω_0 y el ángulo de la placa con el plano OXY es $\pi/3$. Calcular la velocidad del centro de masas G cuando la placa alcanza el plano horizontal.
4. Reacción en el vértice A y en el lado BC. Para este apartado se recomienda emplear coordenadas cilíndricas.

⋆

1.— Para expresar las componentes del tensor de inercia emplearemos un triedro del sólido $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ con las direcciones indicadas en la figura: $\boldsymbol{i}$ horizontal y paralelo al lado BC, $\boldsymbol{j}$ según la altura del triángulo (y línea de máxima pendiente) MA, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$. Tenemos en cuenta en primer lugar que al tratarse de un triángulo equilátero, los momentos de inercia en su centro G respecto de cualquier eje del plano son iguales y principales. Obtenemos mediante el teorema de Steiner el momento de inercia en G paralelo a un lado:



$$I_{xx} = \frac{1}{6}m\left(a\sqrt{3}\right)^2 - m\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}ma^2 . \tag{1}$$

El momento de inercia según el eje normal a la placa Gz es también principal e igual a la suma de los dos ejes del plano. El tensor central de inercia resulta

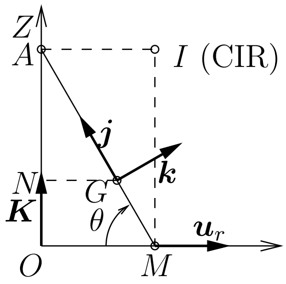
$$\boxed{[\boldsymbol{I}_G] = \frac{1}{6}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .} \tag{2}$$

El movimiento del sistema se puede expresar mediante los dos grados de libertad (ψ, θ) definidos en la figura. A partir de ellos la expresión de la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{k}\,, \tag{3}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\boldsymbol{K} = \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$.

Por otra parte, el movimiento del centro de masas G podemos interpretarlo como proveniente de un movimiento de rotación $\dot{\theta}$ de AM en el plano vertical OMA, con centro instantáneo de rotación I, y un movimiento de arrastre $\dot{\psi}$ de este plano alrededor de OZ. La velocidad se puede expresar como



$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_G &= \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}a\cos\theta\,\dot{\psi}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}a\cos\theta\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{K} - \frac{2}{\sqrt{3}}a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_r\,, \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos empleado el vector unitario $\boldsymbol{u}_r$ en la dirección OM.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la energía cinética es

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{sen}^2\,\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\dot{\psi}^2\,.} \tag{5}$$

Por otra parte, la energía cinética proviene exclusivamente del peso y vale

$$\boxed{V = mgZ_G = mg\frac{a}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,,} \tag{6}$$

siendo la energía mecánica total $E = T + V$.

2.— Obtenemos en primer lugar el momento cinético en G,

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}ma^2\dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{k}\,. \tag{7}$$

El momento cinético alrededor de OZ se obtiene como

$$H_{OZ} = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{H}_G + \boldsymbol{r}_{OG}\wedge m\boldsymbol{v}_G) = (\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{H}_G + \overline{NG}(m\,\overline{NG}\,\dot{\psi})\,; \tag{8}$$

teniendo en cuenta $\overline{NG} = \frac{2}{\sqrt{3}}a\cos\theta$ y operando resulta la expresión

$$\boxed{H_{OZ} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}(1 + 9\cos^2\theta)\,.} \tag{9}$$

3.— El sistema es conservativo, luego se conserva la energía total $E = T + V$. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales $\dot{\psi}_0 = \omega_0, \theta_0 = \pi/3$ y sustituyendo en las expresiones (5) y (6)

$$\boxed{E = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{sen}^2\,\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\dot{\psi}^2 + mg\frac{a}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{13}{48}ma^2\omega_0^2 + mg\frac{a}{2}\,.} \tag{10}$$

Por otra parte, todas las fuerzas sobre la placa o son verticales o cortan al eje OZ, por lo que el momento cinético respecto de este eje se conserva. Considerando las condiciones iniciales en (9) resulta

$$\boxed{H_{OZ} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}(1 + 9\cos^2\theta) = \frac{13}{24}ma^2\omega_0\,.} \tag{11}$$

4.— La única fuerza horizontal sobre la placa es la reacción $\boldsymbol{R}_A$ en A, que podemos calcular mediante las componentes horizontales de la aceleración de G. Para ello emplearemos coordenadas cilíndricas como sugiere el enunciado. Denominando $r = \overline{NG}$ a la coordenada radial de G y ψ a la angular:

$$\boldsymbol{a}_G = (\ddot{r} - r\dot{\psi}^2)\,\boldsymbol{u}_r + (2\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi})\,\boldsymbol{i} + \ddot{Z}_G\,\boldsymbol{K}\,. \tag{12}$$

Operando,

$$\boxed{\begin{aligned} (R_A)_r &= m(a_G)_r = -m\frac{2}{\sqrt{3}}a(\operatorname{sen}\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\dot{\psi}^2) \\ (R_A)_x &= m(a_G)_x = m\frac{2}{\sqrt{3}}a(-2\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\dot{\psi} + \cos\theta\ddot{\psi})\,. \end{aligned}} \tag{13}$$

Por último, la reacción sobre el lado BC será vertical y su resultante estará aplicada en algún punto intermedio entre B y C. Su expresión se obtiene inmediatamente a partir del peso y la aceleración vertical de G:

$$\boxed{R_{BC} = mg + m(a_G)_Z = mg + m\frac{1}{\sqrt{3}}a(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}^2)\,.} \tag{14}$$

Estas expresiones de las reacciones (13), (14) están en función de los grados de libertad y sus derivadas primeras y segundas. Se podrían eliminar de estas expresiones las derivadas segundas empleando las ecuaciones de la dinámica (10), (11), quedando entonces las reacciones únicamente en función de la configuración y de las velocidades, lo que se denomina el *estado* del sistema. (En este caso en que hemos obtenido integrales primeras emplearíamos más en concreto sus derivadas respecto al tiempo.)