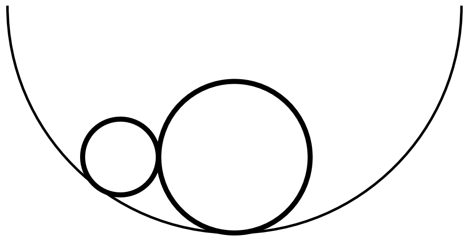
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (27 de mayo del 2009)

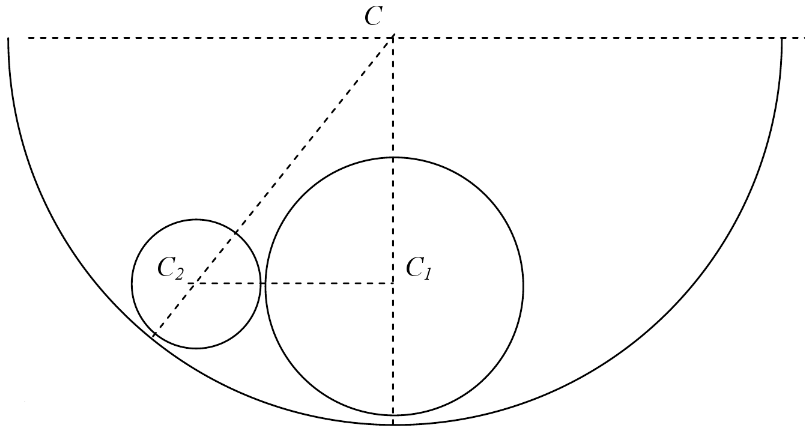
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.



Sobre una superficie semicilíndrica (fija, de eje horizontal y radio $6r$) reposa un cilindro (homogéneo, de eje paralelo al anterior, peso P y radio $2r$). Se coloca otro cilindro (homogéneo, de eje paralelo a los anteriores, peso Q y radio r) apoyado en la superficie y en el primer cilindro. Se desea que, tras colocar el segundo cilindro, el sistema permanezca en equilibrio, no alterándose la posición del primer cilindro, existiendo en todos los contactos un rozamiento al deslizamiento del mismo valor μ. Se pide:

1. Valor mínimo de μ.
2. Definir, tanto en dirección como en módulo, las reacciones en los tres contactos.



1.— De los datos del enunciado se deduce inmediatamente:

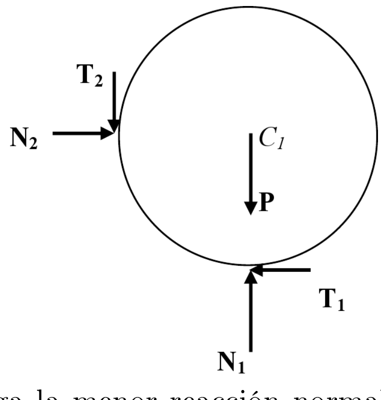
$$\begin{aligned}\overline{CC_1} &= 6r - 2r = 4r\\ \overline{CC_2} &= 6r - r = 5r\\ \overline{C_1C_2} &= r + 2r = 3r\,.\end{aligned} \qquad (1)$$

Luego el triángulo CC_1C_2 es rectángulo en C_1 ($3^2 + 4^2 = 5^2$, se trata del famoso triángulo llamado *egipcio*). Como el cateto CC_1 debe ser vertical (ya que este cilindro estaba en equilibrio antes de colocar el otro), obtenemos que C_2C_1 debe ser horizontal.

Por las preguntas formuladas (relativas al rozamiento y a las reacciones) vemos que el procedimiento más adecuado para resolver el problema no es el analítico, sino el vectorial de las Ecuaciones Cardinales de la Estática. Dado que el sistema total no es rígido, debemos analizar independientemente cada una de sus partes rígidas.

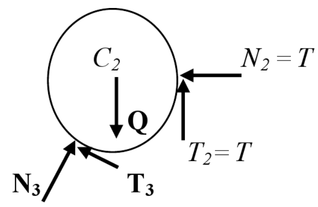
Aislemos el primer cilindro:

- Fuerza activa: el peso P
- Reacción en el apoyo inferior:
  - Normal: N_1
  - Tangencial: $T_1 \leq \mu N_1$
- Reacción del otro cilindro:
  - Normal: N_2
  - Tangencial: $T_2 \leq \mu N_2$.



Tomando momentos en C_1 para este cilindro se obtiene $T_1 = T_2 = T$. Este primer resultado nos muestra que al ser iguales las reacciones tangenciales en estos dos contactos, aquél que tenga la menor reacción normal deslizará antes que el otro. Tomando momentos en el punto de apoyo sobre la superficie fija: $N_2 = T$; y considerando el equilibrio de fuerzas verticales: $N_1 = P + T$. Como $N_1 > N_2$, habrá antes deslizamiento en el contacto entre los cilindros que en el apoyo inferior.

Aislemos ahora el segundo cilindro:



- Fuerza activa: el peso Q
- Reacción del otro cilindro:
  - Normal: $-N_2$
  - Tangencial: $-T_2 = -T$
- Reacción en el apoyo izquierdo:
  - Normal: N_3
  - Tangencial: $T_3 \leq \mu N_3$.

Tomando Momentos en C_2: $T_3 = T$. Este resultado nos muestra que al ser iguales las reacciones tangenciales en estos dos contactos, aquél que tenga la menor reacción normal deslizará antes que el otro. Considerando el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\frac{3}{5}N_3 = T + \frac{4}{5}T \quad \Rightarrow \quad N_3 = 3T\,; \tag{2}$$

como $N_3 > N_2 = T$, habrá antes deslizamiento en el contacto entre los cilindros que en el apoyo izquierdo.

Hemos obtenido que el contacto crítico es el existente entre los dos cilindros, en el que $T_2/N_2 = T/N = 1$, por lo que el valor mínimo pedido de μ es:

$$\boxed{\mu_{\text{mín}} = 1\,.} \tag{3}$$

2.— Ya hemos obtenido las componentes de las reacciones pedidas en función de T. Si en el segundo cilindro expresamos el equilibrio de fuerzas verticales:

$$\frac{4}{5}N_3 + \frac{3}{5}T + T = Q \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4}Q\,, \tag{4}$$

con lo que podemos contestar directamente:

- Apoyo inferior: componentes $(P + Q/4, Q/4)$
  - Módulo $= \sqrt{P^2 + \frac{1}{8}Q^2 + \frac{1}{2}PQ}$
  - Dirección: forma con la vertical $\operatorname{arc\,tg}[Q/(4P+Q)]$
- Apoyo izquierdo: componentes $(3Q/4, Q/4)$
  - Módulo $= \frac{1}{4}Q\sqrt{10}$
  - Dirección: forma con CC_2 el ángulo $\operatorname{arc\,tg}(1/3)$ (que también es el ángulo que forma con la vertical)
- Contacto entre los cilindros: componentes $(Q/4, Q/4)$
  - Módulo $= \frac{1}{4}Q\sqrt{2}$
  - Dirección: forma 45° con la horizontal.