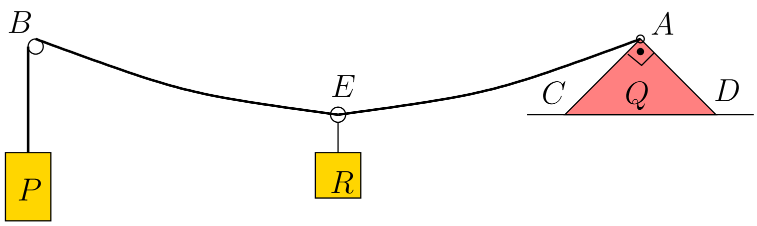
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

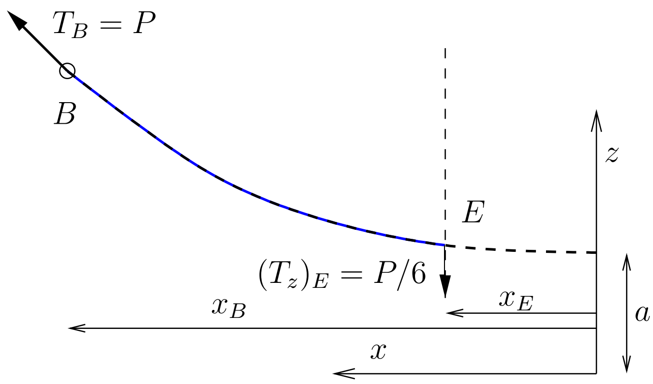
Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera un cable flexible homogéneo entre dos puntos A y B a la misma altura. El extremo A está anclado a un macizo pesado con forma de triángulo rectángulo isósceles ACD, que descansa sobre una superficie horizontal suficientemente rugosa para que no deslice. El extremo B tiene una pequeña polea lisa de la que cuelga un contrapeso P. En el cable se cuelga un peso $R = P/3$ mediante una pequeña argolla lisa. Se sabe que en la configuración de equlibrio el valor de P es quince veces el peso del cable BEA, pudiendo despreciarse el peso del cable entre B y P. Se pide:



1. Valor necesario del peso Q del macizo ACD para que no vuelque, expresado en función de P.
2. Relación f/L entre la flecha del cable y su luz.

1.— El cable forma dos arcos simétricos de catenaria, BE y EA. Considerando el tramo BE el punto central E estará situado en una abscisa x_E respecto al origen de coordenadas de la catenaria, ya que la pendiente en este punto no es nula. Los datos del problema nos permiten expresar tres ecuaciones: primeramente la tensión en B cuyo valor es P transmitido a través de la polea,



$$qa \cosh \frac{x_B}{a} = P\,; \tag{1}$$

en segundo lugar la tensión vertical en E que por simetría es la mitad del peso $R = P/3$,

$$qa \,\mathrm{senh}\, \frac{x_E}{a} = \frac{P}{6}\,; \tag{2}$$

y en tercer lugar el peso del cable EB que es la mitad del total,

$$qa \,\mathrm{senh}\, \frac{x_B}{a} - qa \,\mathrm{senh}\, \frac{x_E}{a} = \frac{P}{30}\,. \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (3) se obtiene la tensión vertical en B,

$$(T_z)_B = qa \,\mathrm{senh}\, \frac{x_B}{a} = \frac{P}{30} + \frac{P}{6} = \frac{P}{5}\,. \tag{4}$$

Por otra parte la tensión horizontal (constante) resulta

$$qa = T_0 = \sqrt{T^2 - T_z^2} = \sqrt{P^2 - (P/5)^2} = P\frac{2\sqrt{6}}{5}\,. \tag{5}$$

Conocidas ya las componentes de la tensión del cable en el extremo B, que son iguales en el A, se puede plantear el equilibrio al vuelco del macizo ACD. En el límite, la normal $N = Q + (T_z)_A$ se habrá desplazado hasta el vértice C. Tomando momentos en este punto:

$$T_0 \frac{b}{\sqrt{2}} = [Q + (T_z)_A] \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad Q = T_0 - (T_z)_A = P \frac{2\sqrt{6} - 1}{5} = 0{,}7798P\,. \tag{6}$$

2.— La expresión de la flecha es

$$f = a \cosh \frac{x_B}{a} - a \cosh \frac{x_E}{a}\,. \tag{7}$$

El primer sumando, a partir de (1) vale P/q. Si tenemos en cuenta (2) y (5) podemos obtener

$$\cosh \frac{x_E}{a} = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \frac{x_E}{a}} = \sqrt{1 + \left(\frac{P/6}{qa}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{5}{12\sqrt{6}}\right)^2}\,; \tag{8}$$

teniendo el cuenta el valor de a de (5),

$$a \cosh \frac{x_E}{a} = \frac{P}{q} \frac{2\sqrt{6}}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{5}{12\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{P}{q} \sqrt{\frac{24}{25} + \frac{1}{36}}\,; \tag{9}$$

y por tanto

$$f = \frac{P}{q} \left(1 - \sqrt{\frac{24}{25} + \frac{1}{36}}\right) = 6{,}1299 \cdot 10^{-3} \frac{P}{q}\,. \tag{10}$$

Por otra parte, la luz se obtiene mediante

$$L = 2(x_B - x_E) = 2a \left(\operatorname{argsenh} \frac{1}{2\sqrt{6}} - \operatorname{argsenh} \frac{5}{12\sqrt{6}}\right) = 6{,}5527 \cdot 10^{-2} \frac{P}{q}\,. \tag{11}$$

Finalmente, dividiendo las expresiones (10) y (11),

$$\frac{f}{L} = 0{,}093548\,. \tag{12}$$