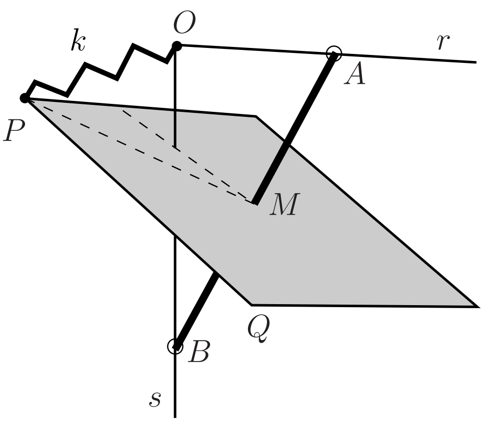
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

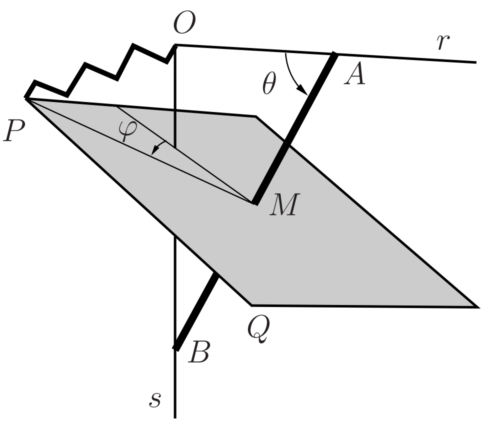
Un sólido rígido pesado está formado por una varilla AB, de masa m y longitud a, unida ortogonalmente en su punto medio M al centro de una placa cuadrada, también de masa m y lado a. Los extremos de la varilla A y B deslizan en sendas rectas fijas horizontal r y vertical s que se cortan en O, aunque estas rectas no interfieren con la placa cuadrada. Además, un muelle de longitud natural nula y rigidez k une un vértice P de la placa con O. Se pide determinar:



1. Definir las coordenadas generalizadas y obtener las ecuaciones generales del movimiento e integrales primeras.

2. La constante k del muelle para que exista una posición de equilibrio estable con ángulo entre la varilla y la recta horizontal r de 60º, quedando la varilla por debajo.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad. Se obtienen las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas θ y φ de la figura.



La energía cinética del sólido rígido es

$$T = \frac{1}{2}(2m)v_M^2 + \frac{1}{2}I_{AB}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_n\dot{\theta}^2, \tag{1}$$

siendo $v_M = a\dot{\theta}/2$ la velocidad del centro de gravedad M del sólido rígido, e $I_{AB} = I_n = ma^2/6$ los momentos de inercia respecto a AB y respecto a un eje ortogonal a OAB que pasa por M (al ser un cuadrado regular todos los momentos normales a AB por M son iguales).

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = -(2m)g\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)\right) + \frac{1}{2}k|OP|^2, \tag{2}$$

siendo por consideraciones geométricas

$$|OP|^2 = a^2(3 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\cos(\varphi))/4. \tag{3}$$

Por tanto, la función Lagrangiana del sistema resulta

$$L = T - V = \left(\frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{12}\dot{\varphi}^2\right) - \left[-mga\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{ka^2}{8}\left(3 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\cos(\varphi)\right)\right]. \tag{4}$$

A partir de la que se obtienen las ecuaciones generales del movimiento

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\Rightarrow\frac{2ma^2}{3}\ddot{\theta}-mga\cos(\theta)-\frac{\sqrt{2}ka^2}{2}\cos(2\theta)\cos(\varphi)=0\quad\text{y}\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0\Rightarrow\frac{ma^2}{6}\ddot{\varphi}+\frac{\sqrt{2}ka^2}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\varphi)=0.\tag{6}$$

La conservación de la energía $E=T+V=$ cte. es la única integral primera que se encuentra, ya que ninguna de las coordenadas es cíclica.

2.— Si para $\theta=\pi/3$ existe una posición de equilibrio, entonces deben verificarse

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0\Rightarrow -mga\cos(\pi/3)-\frac{\sqrt{2}ka^2}{2}\cos(2\pi/3)\cos(\varphi)=0\quad\text{y}\tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2}ka^2}{4}\operatorname{sen}(2\pi/3)\operatorname{sen}(\varphi)=0.\tag{8}$$

La solución del sistema es $\varphi=0$ y $k=\sqrt{2}mg/a$; existe otra solución, pero sin significado físico al ser k negativo.

Para comprobar que la solución es estable, basta con verificar que la matriz Hessiana del potencial $[\mathbf{K}]$ es definida positiva. En nuestro caso

$$[\mathbf{K}]=\frac{\sqrt{3}mga}{4}\begin{pmatrix}6&0\\0&1\end{pmatrix},\tag{9}$$

definida positiva al ser diagonal con todos los elementos de ésta positivos.