Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2009)

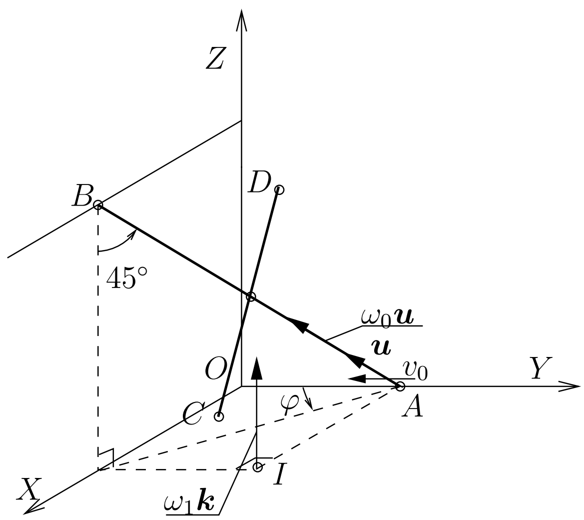
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido está formado por dos barras iguales AB y CD de longitud $2b$ soldadas perpendicularmente entre sí en sus puntos medios. El extremo A se mueve con velocidad v_0 constante sobre el eje OY de un sistema cartesiano fijo, y el extremo B se mueve en la recta horizontal fija $Y = 0, Z = b\sqrt{2}$. Asimismo, el sólido tiene una rotación alrededor de la varilla AB con velocidad angular ω_0 constante. Se pide:

1. Obtener el vector velocidad de rotación del sólido y su velocidad mínima;
2. Calcular la aceleración angular del sólido;
3. Obtener la velocidad y aceleración del extremo C cuando éste se encuentra en el plano OXY y la distancia OA es b.

1.— La varilla AB forma en todo momento 45° con el plano OXY, y su movimiento es plano, ya que las velocidades de ambos puntos son horizontales, el de A paralelo a OY y el de B paralelo a OX. Será por tanto una rotación instantánea de velocidad angular $\omega_1\,\boldsymbol{k}$ por el C.I.R. I, siendo $\omega_1 = v_0/(b\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi)$. El movimiento del sólido será una composición de esta rotación con otra $\omega_0\,\boldsymbol{u}$, siendo $\boldsymbol{u}$ el vector unitario según AB. La velocidad angular del sólido es por tanto



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \omega_0\,\boldsymbol{u} + \omega_1\,\boldsymbol{k} = \omega_0\,\boldsymbol{u} + \frac{v_0}{b\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} - \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega_0 + \frac{v_0}{b\operatorname{sen}\varphi}\right)\boldsymbol{k}\,.\end{aligned} \tag{1}$$

La velocidad mínima o velocidad de deslizamiento es la velocidad de un punto cualquiera proyectada según la dirección de la rotación. El movimiento definido no es una rotación instantánea por lo que esta velocidad mínima no será nula:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = \frac{v_0\omega_0(1/\sqrt{2})\cos\varphi}{\sqrt{\omega_0^2+\omega_1^2+\sqrt{2}\omega_0\omega_1}}\,. \tag{2}$$

2.— Derivando la expresión (1) y teniendo en cuenta que $\dot{\varphi} = \omega_1$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} &= \omega_0\,\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u} + \dot{\omega}_1\,\boldsymbol{k}\\ &= \omega_0\omega_1\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}) - \frac{v_0\omega_1\cos\varphi}{b\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\boldsymbol{k}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

3.— En la configuración pedida, al ser $\overline{OA} = b$ resulta $\varphi = 45°$. Por otra parte, al estar el punto C en el plano OXY la cruceta debe estar en un plano vertical (es decir, que contiene la dirección Z) y el punto C bajo la vertical por B y por tanto en el eje OX, siendo $\overline{OC} = b$. Para calcular la velocidad sumamos los términos provenientes de la composición de rotaciones en la configuración dada,

$$\boldsymbol{v}_C = v_0\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 b(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\,. \tag{4}$$

La expresión de la aceleración la desarrollamos a partir del punto A,

$$\boldsymbol{a}_C = \cancel{\boldsymbol{a}_A} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC})\,. \tag{5}$$

Considerando $\boldsymbol{r}_{AC} = b\,\boldsymbol{i} - b\,\boldsymbol{j}$ y los valores de $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ en la posición dada,

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{AC} = -\frac{v_0^2}{b}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) - \omega_0 v_0\,\boldsymbol{k}\,;$$
$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC}) = b\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} + \frac{v_0}{b}\right)^2 (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + \left(\frac{b\omega_0^2}{\sqrt{2}} + v_0\omega_0\right)\boldsymbol{k}\,.$$

Resulta finalmente

$$\boldsymbol{a}_C = -\left(\frac{2v_0^2}{b} + \frac{b\omega_0^2}{2} + \sqrt{2}v_0\omega_0\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{b\omega_0^2}{2} + \sqrt{2}v_0\omega_0\right)\boldsymbol{j} + \frac{b\omega_0^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$