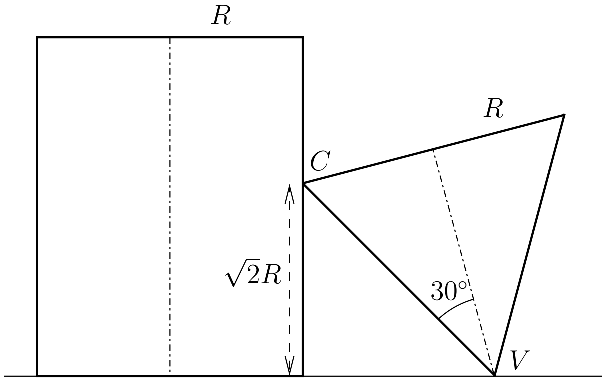
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (4 de septiembre del 2010)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un cono de radio R y semiángulo cónico 30° se mueve de manera que su base rueda sin deslizar sobre un cilindro fijo de radio R, estando en todo momento el vértice V en el plano de la base del cilindro y el punto de contacto C a una altura $\sqrt{2}R$ sobre dicho plano (ver la sección principal en la figura). El punto de contacto C y el vértice V están contenidos en todo momento en un plano vertical por el eje del cilindro, siendo v_0 la velocidad constante de sucesión de C.



Se pide:

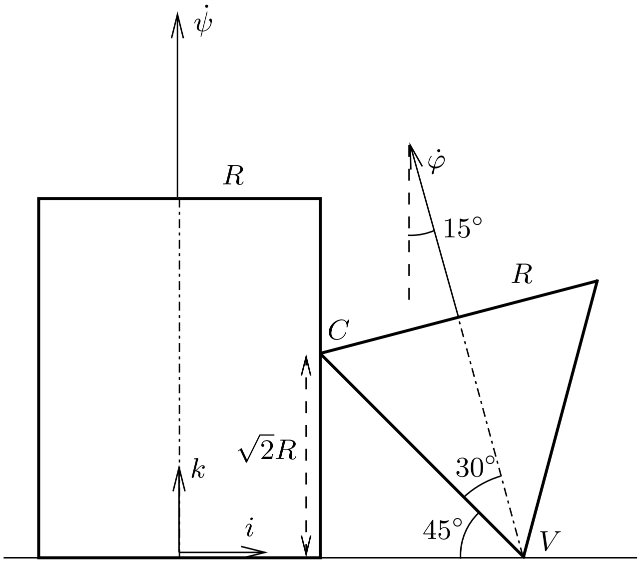
1. Razonar si el movimiento corresponde a una rotación instantánea y, en su caso, interpretarlo como la composición de una rotación alrededor del eje del cilindro y una rotación alrededor del eje del cono.

2. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular del cono.

3. Calcular las velocidades y la aceleraciones del vértice V y del punto material de la base del cono que está en contacto con el cilindro.

⋆

1. Dado que el cono tiene al menos un punto de velocidad nula (el punto de contacto C con el cilindro), su movimiento corresponde a una rotación instantánea alrededo de un eje que pasa por C.
De acuerdo con el enunciado, el movimiento del plano de la figura que contiene a la sección principal del cono es un rotación $\dot{\psi}$ alrededor del eje del cilndro, que se puede componer con otra rotación $\dot{\varphi}$ alrededor del eje del cono. Al ser el eje del cono una recta material del mismo, el punto Q de intersección de ambas rotaciones es un punto fijo del movimiento. En consecuencia, el eje instantáneo de rotación es la recta que pasa por los puntos C y Q.



2. Dado que el punto geométrico de contacto entre el cono y el cilindro está contenido en todo momento en el plano de la figura que contiene a la sección principal del cono, a partir de su velocidad de sucesión se puede obtener la expresión de $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{v_0}{R} \tag{1}$$

Expresando la velocidad del punto material del cono que está en contacto con el cilindro mediante la composición de las velocidades de rotación $\dot{\psi}$ y $\dot{\varphi}$, e imponiendo que sea nula:

$$\dot{\psi}R - \dot{\varphi}R = 0 \qquad \dot{\varphi} = \dot{\psi} = \frac{v_0}{R} \tag{2}$$

Utilizando los ángulos deducidos en la figura y los ejes auxiliares representados en la misma, la expresión vectorial de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{v_0}{R}(-\operatorname{sen} 15°\boldsymbol{i} + (1 + \cos 15°)\boldsymbol{k}) = \frac{v_0}{R}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\boldsymbol{i} + (1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})\boldsymbol{j}\right) \tag{3}$$

Esta velocidad angular permanece constante respecto del plano que gira con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor del eje del cilindro. Por tanto su derivada temporal corresponde únicamente a la rotación de dicho plano:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\frac{v_0^2}{R^2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\boldsymbol{j} \tag{4}$$

3. El vértice V del cono describe la circunferencia contenida en el plano XY, con centro en el eje del cilindro y radio $R(1+\sqrt{2})$, permaneciendo en todo momento en el plano que gira con $\dot{\psi}$. Por tanto, su velocidad es:

$$\boldsymbol{v}_V = \dot{\psi}R(1+\sqrt{2})\boldsymbol{j} = v_0(1+\sqrt{2})\boldsymbol{j} \tag{5}$$

y su aceleración corresponde únicamente al término *normal*:

$$\boldsymbol{a}_V = -\frac{v_V^2}{(1+\sqrt{2})R}\boldsymbol{i} = -v_0^2\frac{1+\sqrt{2}}{R}\boldsymbol{i} \tag{6}$$

La aceleración del punto de la base del cono la obtenemos a partir de la aceleración del vértice mediante la expresión del campo de aceleraciones del sólido:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_V + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{VC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{VC}) \tag{7}$$

Sustituyendo en esta expresión $\boldsymbol{r}_{VC} = \sqrt{2}R(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$ y las expresiones de $\boldsymbol{a}_V$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ calculadas anteriormente, resulta:

$$\boldsymbol{a}_C = -\frac{v_0^2}{R}\left((1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\boldsymbol{k}\right) \tag{8}$$