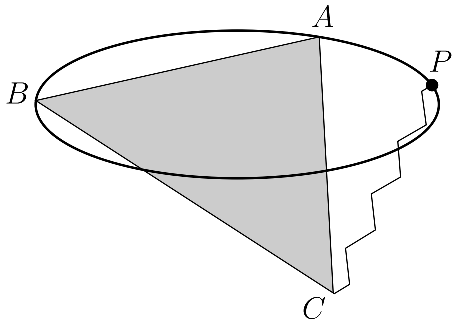
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (4 de septiembre del 2010)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una placa pesada de masa m con forma de triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}r$, se mueve con dos de sus vértices A y B deslizando sin rozamiento en una circunferencia horizontal fija de radio r. El vértice restante C se une a un punto fijo P de la circunferencia a través de un muelle de longitud natural nula y rigidez k.



Se pide determinar:

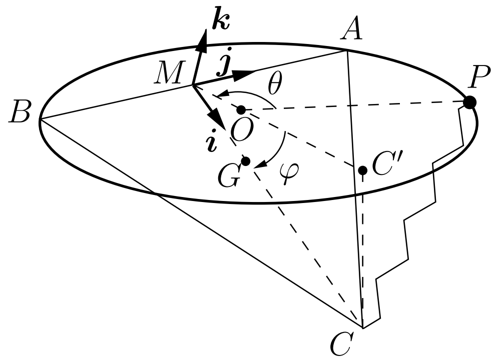
1. Un conjunto adecuado de parámetros para describir la configuración del sistema.
2. Las energías cinética y potencial.
3. Las ecuaciones del movimiento.
4. Las integrales primeras, tanto para el caso general descrito como para el caso de que no hubiese muelle.

NOTA: El momento de inercia de una placa triangular respecto a su base es $mh^2/6$, siendo m la masa y h la altura.

⋆

1. El sistema tiene dos grados de libertad. Se eligen como coordenadas generalizadas los ángulos θ y φ de la figura: el ángulo de $\overrightarrow{OM}$ con $\overrightarrow{OP}$ (siendo O el centro de la circunferencia y M el punto medio de AB), y el correspondiente a la rotación de la placa alrededor de $\overrightarrow{BA}$ desde la posición horizontal, respectivamente. De forma que la velocidad angular de la placa es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{j}, \tag{1}$$



siendo $\boldsymbol{K}$ vertical ascendente y $\boldsymbol{j}$ según $\overrightarrow{BA}$.

2. *a)* La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}, \tag{2}$$

siendo v_G el módulo de la velocidad del centro de masas G, e $\boldsymbol{I}_G$ el tensor de inercia en este punto.

A su vez, la velocidad en G se puede obtener a partir de la de M como

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{\Omega} \wedge \overrightarrow{MG},$$

donde $\boldsymbol{v}_M = -(r/2)\dot{\theta}\boldsymbol{j}$ y $\overrightarrow{MG} = (r/2)\boldsymbol{i}$. Además, la velocidad angular queda determinada según (1) teniendo en cuenta $\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{k}$. Operando,

$$v_G^2 = \frac{r^2}{4}\left[(1-\cos\varphi)^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right].$$

Por otra parte, el tensor de inercia en G es de la forma $\boldsymbol{I}_G = I_{G,x}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}+I_{G,x}\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+2I_{G,x}\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}$, siendo $I_{G,x}$ el momento de inercia respecto a cualquier eje en el plano de la placa que pase por G. Según el teorema de Steiner, a partir del dato del enunciado y dado que altura del triángulo es $h = 3r/2$, se obtiene $I_{G,x} = mh^2/6 - m(h/3)^2 = mr^2/8$.

Simplificando en (2) resulta finalmente

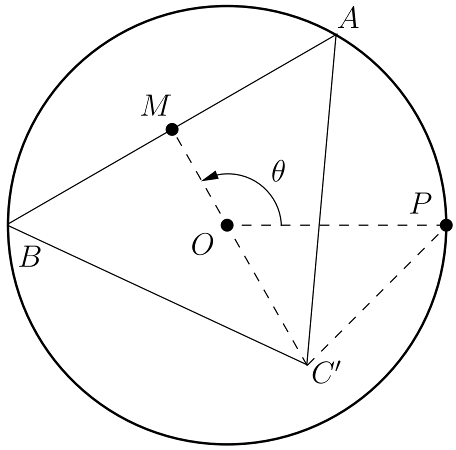
$$T = \frac{mr^2}{16}\left[(3+3\cos^2\varphi - 4\cos\varphi)\dot\theta^2 + 3\dot\varphi^2\right]. \tag{3}$$

b) La energía potencial es

$$V = mgz_G + \frac{1}{2}k\overline{PC}^2, \tag{4}$$

siendo z_G la altura de G. Esto es, $z_G = -(r/2)\operatorname{sen}\varphi$.

Además, $\overline{PC}^2 = \overline{PC'}^2 + \overline{CC'}^2$, siendo C' la proyección de C sobre el plano de la circunferencia, y por tanto $\overline{CC'} = (3r/2)\operatorname{sen}\varphi$ y $\overline{OC'} = (r/2)(3\cos\varphi - 1)$. A su vez, por el teorema del coseno,



$$\begin{aligned}\overline{PC'}^2 =& \overline{OP}^2 + \overline{OC'}^2 + 2\overline{OP}\,\overline{OC'}\cos\theta = \\ & r^2 + \left[\frac{r}{2}(3\cos\varphi-1)\right]^2 + 2r\left[\frac{r}{2}(3\cos\varphi-1)\right]\cos\theta.\end{aligned}$$

Operando,

$$\overline{PC}^2 = \frac{r^2}{2}(7 - 3\cos\varphi - 2\cos\theta + 6\cos\varphi\cos\theta).$$

En definitiva, la energía potencial (4) resulta

$$V = -mg\frac{r}{2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{4}kr^2(7-3\cos\varphi - 2\cos\theta + 6\cos\varphi\cos\theta). \tag{5}$$

3. La Lagrangiana del sistema es

$$\begin{aligned}L = T - V =& \frac{mr^2}{16}\left[(3+3\cos^2\varphi - 4\cos\varphi)\dot\theta^2 + 3\dot\varphi^2\right] + mg\frac{r}{2}\operatorname{sen}\varphi \\ & -\frac{1}{4}kr^2(7-3\cos\varphi - 2\cos\theta + 6\cos\varphi\cos\theta).\end{aligned}$$

Son ecuaciones diferenciales del movimiento

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$$

resultando

$$\frac{mr^2}{8}\left[(3+3\cos^2\varphi - 4\cos\varphi)\ddot\theta - (6\cos\varphi - 4)\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right] + \frac{1}{2}kr^2(1-3\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta = 0, \tag{6}$$

$$\frac{3mr^2}{8}\ddot\varphi - \frac{mr^2}{8}(2-3\cos\varphi)\dot\theta^2\operatorname{sen}\varphi - mg\frac{r}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}kr^2(3-6\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi. \tag{7}$$

4. La única integral primera del caso general ($k \neq 0$) es la conservación de la energía mecánica total. Esto es, $E = T + V = \text{cte}$.

Por otra parte, si no hay muelle, entonces $\partial L/\partial\theta = 0$, por lo que θ es coordenada cíclica y, además de la conservación de la energía, también se verifica

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{mr^2}{8}(3+3\cos^2\varphi - 4\cos\varphi)\dot\theta = \text{cte}. \tag{8}$$

Se trata de la conservación del momento cinético respecto al eje vertical que pasa por O.