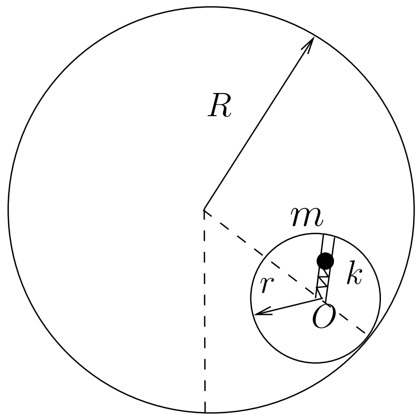
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (30 de noviembre del 2009)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

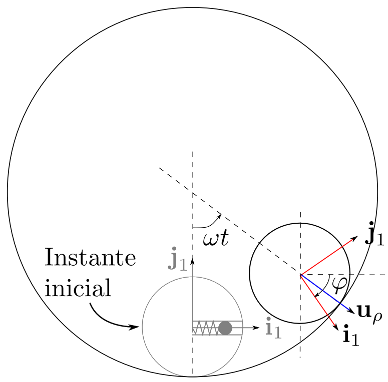
Un disco de radio r rueda sin deslizar dentro de una circunferencia vertical fija de radio R, siendo la velocidad del centro O del disco constante y de valor $\omega(R-r)$. En el disco existe una acanaladura lisa en dirección radial en la que se encuentra ensartada una partícula de masa m unida mediante un muelle de constante k y longitud natural nula al centro del disco O. Se pide:



1. Calcular la ecuación diferencial del movimiento de la partícula discutiendo la existencia o no de integrales primeras del movimiento.

2. Calcular la reacción ejercida por el disco sobre la partícula.

1.— De acuerdo con la velocidad del punto O, el radio vector que fija la posición de dicho punto gira con velocidad ω. Sea un sistema de referencia $\{O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1\}$ que acompaña el movimiento del disco de manera que $\boldsymbol{i}_1$ tiene la dirección de la acanaladura, siendo φ el ángulo girado por el disco (ver figura). La condición de rodadura sin deslizamiento implica que el punto de contacto entre el aro y el disco tenga velocidad nula por lo que se verifica:



$$v_O = \omega(R-r) = \dot{\varphi} r \Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{R-r}{r}\omega$$

obteniéndose la velocidad angular de rotación del sistema móvil

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

Expresado a través del sistema móvil descrito, la aceleración de la partícula resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= \ddot{x}\boldsymbol{i}_1 \\
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge x\boldsymbol{i}_1) = -\omega^2(R-r)\boldsymbol{u}_\rho - \dot{\varphi}^2 x\boldsymbol{i}_1 \\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{x}\boldsymbol{i}_1 = -2\dot{\varphi}\dot{x}\boldsymbol{j}_1
\end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{u}_\rho = \operatorname{sen}(\varphi + \omega t)\boldsymbol{i}_1 - \cos(\varphi + \omega t)\boldsymbol{j}_1$.

Las fuerzas actuantes: la atractiva ejercida por el muelle $\boldsymbol{F}_a$, el peso $\boldsymbol{P}$ y la reacción $\boldsymbol{R}$ se expresan en el sistema móvil del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_a &= -kx\boldsymbol{i}_1 \\
\boldsymbol{P} &= mg(\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i}_1 - \cos\varphi\boldsymbol{j}_1) \\
\boldsymbol{R} &= N\boldsymbol{j}_1
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial del movimiento resulta:

$$(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{i}_1 = m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}_1)$$

$$\boxed{m\ddot{x} - m\omega^2(R-r)\operatorname{sen}(\varphi+\omega t) - m\dot{\varphi}^2 x + kx - mg\operatorname{sen}\varphi = 0} \tag{1}$$

siendo $\varphi = \dfrac{R-r}{r}\omega t$.

En este caso no se conserva la energía al estar el disco sujeto a un movimiento impuesto.

2.— Proyectando la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección $\boldsymbol{j}_1$, se obtiene directamente la reacción, cuyo valor resulta:

$$\boxed{N = mg\cos\varphi + m\omega^2(R-r)\cos(\varphi+\omega t) - 2m\dot{\varphi}\dot{x}} \tag{2}$$