Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTR. (30 de noviembre del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Un plano gira con velocidad constante ω alrededor de una recta fija r que está contenida en él. Dentro de este plano rueda y desliza un disco de radio R sobre la recta r, como muestra la Figura 1. Sabiendo que la velocidad del punto geométrico de contacto A es $|\boldsymbol{v}_A| = \omega R$ y que la velocidad de deslizamiento entre el disco y la recta es $\boldsymbol{v}_d = 2\boldsymbol{v}_A$, se pide:

1. Calcular la velocidad mínima del disco
2. Calcular la aceleración angular del disco
3. Obtener la velocidad y aceleración del punto material del disco que instantáneamente se encuentra en B (posición diametralmente opuesta al punto de contacto con la recta)
4. Obtener la aceleración del punto material del disco que se encuentra en el punto de contacto.

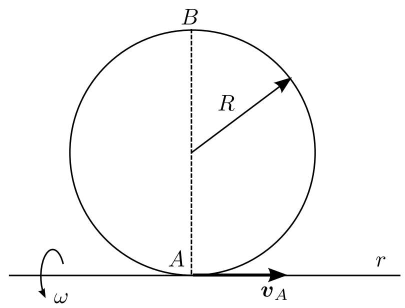

Figura 1: *Vista del disco en verdadera magnitud. El plano que contiene al disco gira con velocidad constante ω alrededor de la recta fija r*

1.— Sea $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ una base móvil según la Figura 2, tal que $\boldsymbol{i}$ tiene la dirección de la recta r, $\boldsymbol{j}$ se encuentra en el plano del disco y $\boldsymbol{k}$ es ortogonal a éste.

El campo de velocidades del disco queda determinado por la velocidad de su centro $\boldsymbol{v}_C$ y su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, que son de la forma

$$\boldsymbol{v}_C = v'_C\boldsymbol{i} + \omega R\boldsymbol{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{i} + \Omega_k\boldsymbol{k}.$$

Esto es, $\boldsymbol{v}_C$ debe tener componente nula según $\boldsymbol{j}$ para que el disco no pierda el contacto con la recta, y la componente de $\boldsymbol{\Omega}$ según $\boldsymbol{j}$ también debe ser nula para que el disco se mantenga en el plano móvil.

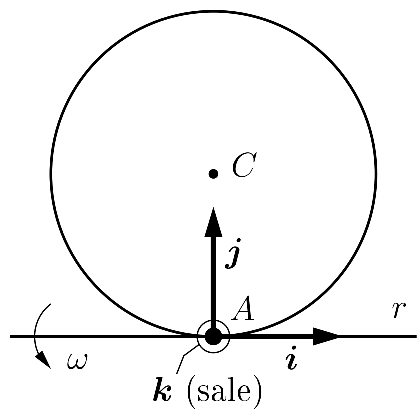

Figura 2: *Sistema móvil*

La velocidad de sucesión de A dada en el enunciado, $\boldsymbol{v}_A$, coincide con la velocidad de C según $\boldsymbol{i}$, por lo que $v'_C = |\boldsymbol{v}_A| = \omega R$. Además, la velocidad de deslizamiento entre el disco y la recta $\boldsymbol{v}_d = 2\boldsymbol{v}_A$ es la velocidad del punto material que se encuentra en A en cada instante, $\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}_{A^*}$, ya que la recta es fija. Por tanto

$$|\boldsymbol{v}_{A*}| = v'_C + \Omega_k R = 2|\boldsymbol{v}_A| = 2\omega R,$$

resultando $\Omega_k = \omega$.

La velocidad de todo punto P del disco viene determinada por

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{A^*} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}. \tag{1}$$

La velocidad mínima de un sólido rígido se encuentra en su eje helicoidal tangente, dado por el lugar geométrico de puntos obtenidos como

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{A^*}}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} = R\boldsymbol{j} + \alpha(\omega \boldsymbol{i} + \omega \boldsymbol{k}).$$

Este eje corta al disco por su centro C. Por tanto, la velocidad mínima es la de C, que puede obtenerse como suma de la velocidad relativa al plano y la velocidad de arrastre por la rotación del plano alrededor de r:

$$\boldsymbol{v}_C = \omega R \boldsymbol{i} + \omega R \boldsymbol{k} = \omega R(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}),$$

cuyo módulo es $|\boldsymbol{v}_C| = v_{\min} = \sqrt{2}\omega R$.

2.— Dado que la velocidad angular del disco respecto al sistema móvil es constante, su aceleración angular se reduce a $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}$, siendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{i}$ la velocidad angular del sistema móvil (esto es, la del plano). Operando resulta $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\omega^2 \boldsymbol{j}$.

3.— Según (1), la velocidad del punto material que instantáneamente se encuentra en B es

$$\boldsymbol{v}_B = 2\omega R \boldsymbol{i} + (\omega \boldsymbol{i} + \omega \boldsymbol{k}) \wedge (2R\boldsymbol{j}) = 2\omega R \boldsymbol{k}.$$

Por otra parte, su aceleración se puede calcular a través del movimiento relativo al plano,

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{B,\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{B,\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{B,\text{rel}},$$

siendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{B,\text{arr}} &= \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} - 2\omega^2 R \boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{a}_{B,\text{cor}} &= 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{B,\text{rel}} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \quad \text{y} \\ \boldsymbol{a}_{B,\text{rel}} &= -\omega^2 R \boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Resulta $\boldsymbol{a}_B = -3\omega^2 R \boldsymbol{j}$.

Otra forma de calcular este valor sería empleando directamente el campo de aceleraciones del sólido en su movimiento absoluto, $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{CB} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge \overrightarrow{CB}\right)$, llegándose al mismo resultado.

4.— Análogamente, la aceleración del punto material del disco que se encuentra en A es

$$\boldsymbol{a}_{A^*} = \boldsymbol{a}_{A^*,\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{A^*,\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{A^*,\text{rel}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + \omega^2 R \boldsymbol{j} = \omega^2 R \boldsymbol{j}.$$