Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (30 de noviembre del 2009)

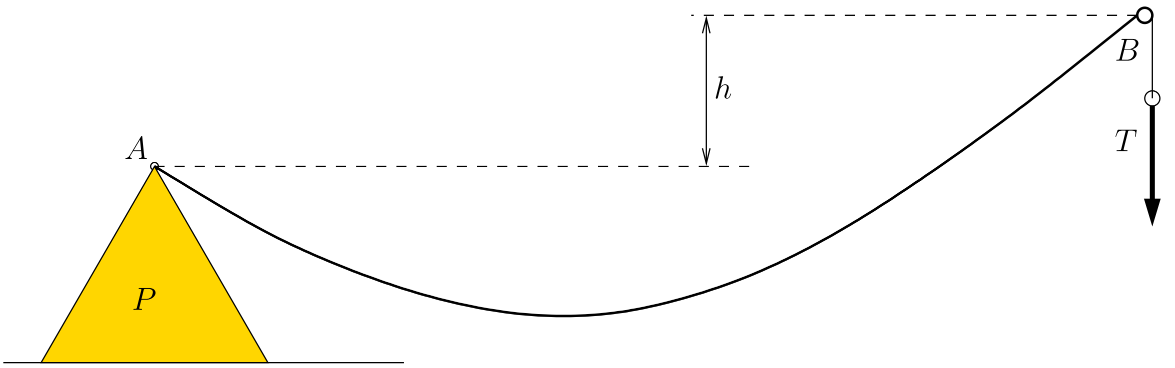
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

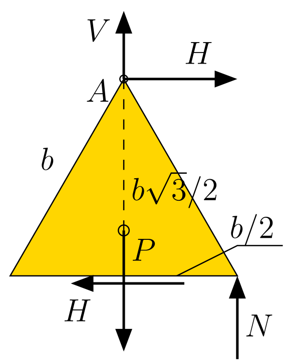
Se considera un cono de semiángulo 30° y peso P, apoyado sobre un plano horizontal rugoso con coeficiente de rozamiento μ. En el vértice A del cono está anclado un cable homogéneo, inextensible y flexible que pasa por una polea lisa pequeña B tensionado por un contrapeso T. La distancia vertical entre A y B es h, y el peso unitario del cable vale $q = P/(4h)$. Se pide:

1. Calcular el coeficiente de rozamiento mínimo para que al tirar el cable del cono con una fuerza suficientemente grande este no deslice sino que cuando pierda el equilibrio su movimiento sea de vuelco.

2. Suponiendo que el rozamiento existente supera el valor calculado antes, y sabiendo que el valor del contrapeso para que el cono comience a volcar es $T = 3P/2$, calcular la distancia horizontal entre A y B cuando se produzca esta situación, expresándola en función de h. Obtener asimismo la acción horizontal y vertical del cable en A, expresándola en función de P.



1.— Denominando (H, V) las acciones horizontal y vertical respectivamente sobre el vértice del cono, y b la generatriz del cono (que como veremos no influye en los resultados), la condición de límite de vuelco se produce cuando la la reacción normal en la base resultante N se ha desplazado hasta la esquina. Aplicando el equilibrio de momentos en este punto:



$$(P - V)\frac{1}{2}b = Hb\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \tag{1}$$

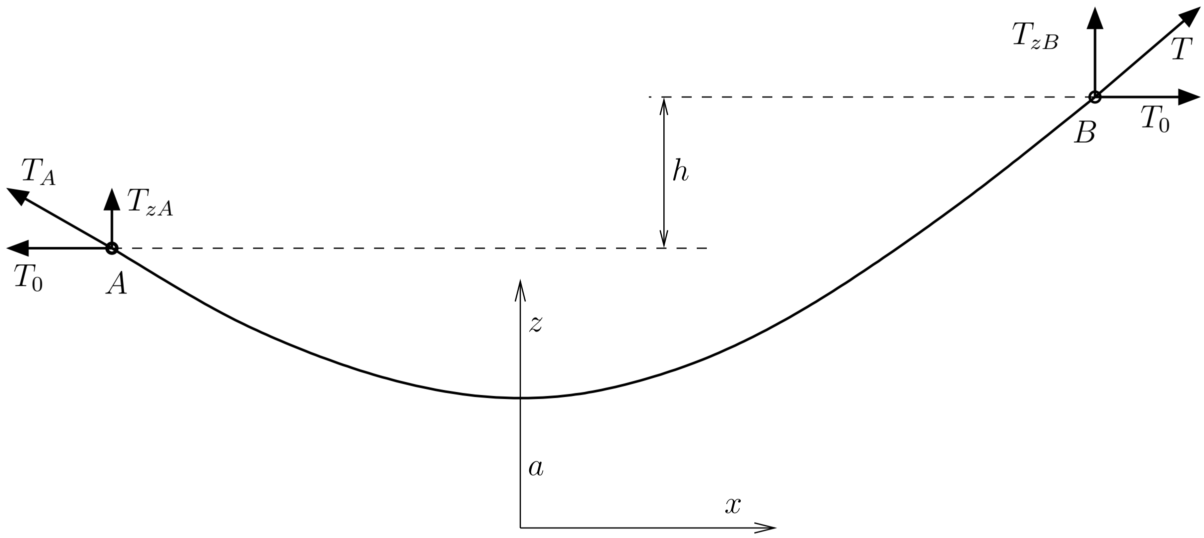
por otra parte el rozamiento mínimo para que no deslice se produce en el límite

$$H \leq \mu N \quad \Rightarrow \quad H = \mu_{\text{mín}}(P - V)\,. \tag{2}$$

Eliminando $(P - V)$ entre ambas expresiones se obtiene

$$H = \mu_{\text{mín}} H\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_{\text{mín}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.} \tag{3}$$

2.— Supondremos como hipótesis de partida que el vértice de la catenaria se sitúa entre A y B, cuyas abscisas en los ejes propios de la catenaria serían $x_A < 0$ y x_B. De esta forma la carga vertical sobre el vértice del cono sería $V = -T_{zA} < 0$. Esto no implica pérdida de generalidad, ya que si eventualmente se obtiene $x_A > 0$ simplemente indicaría que el vértice estaría situado a la izquierda de A, y V sería positiva.



Como es sabido, en la catenaria la tensión horizontal es constante, y coincidirá con la reacción horizontal H en la base del cono, cuyo valor no se conoce a priori, aunque se sabe que es suficiente para que no deslice:

$$H = T_0 = qa\,. \tag{4}$$

La tensión $T_{zA} = -V$ viene definida por el límite de vuelco, según (1):

$$T_{zA} = -qa \operatorname{senh} \frac{x_A}{a} = -V = qa\sqrt{3} - P\,. \tag{5}$$

La condición de altura entre A y B da lugar a otra ecuación,

$$a \cosh \frac{x_B}{a} - a \cosh \frac{x_A}{a} = h\,. \tag{6}$$

Por último expresamos la tensión del cable en B debida al contrapeso,

$$T_B = qa \cosh \frac{x_B}{a} = T = \frac{3}{2}P\,. \tag{7}$$

Considerando el dato del peso del cable $q = P/(4h)$ las ecuaciones (5), (6) y (7) se expresan como:

$$-\operatorname{senh} \frac{x_A}{a} = \sqrt{3} - 4\frac{h}{a} \tag{8}$$

$$\cosh \frac{x_B}{a} - \cosh \frac{x_A}{a} = \frac{h}{a} \tag{9}$$

$$\cosh \frac{x_B}{a} = 6\frac{h}{a}\,. \tag{10}$$

Estas tres ecuaciones se resuelven fácilmente, introduciendo (8) y (10) en (9), lo que resulta finalmente en una ecuación cuadrática en función de $h/a = \beta$:

$$9\beta^2 + 8\sqrt{3}\beta - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{64 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = 0{,}24855\,. \tag{11}$$

(sólo vale el signo más de la raíz ya que debe ser $\beta > 0$). A partir de este resultado se obtienen las abscisas de A y B mediante (8) y (10):

$$\begin{aligned} x_A &= -\frac{h}{\beta}\operatorname{argsenh}(\sqrt{3}-4\beta) = -2{,}74955h \\ x_B &= \frac{h}{\beta}\operatorname{argcosh}(6\beta) = 3{,}84068h\,. \end{aligned} \tag{12}$$

por lo cual la distancia entre A y B resulta:

$$\boxed{x_{AB} = x_B - x_A = 6{,}59023h\,.} \tag{13}$$

Las acciones del cable en A valen

$$\boxed{T_0 = \frac{P}{4\beta} = 1{,}00583P\,;} \qquad \boxed{T_{zA} = \frac{P}{4\beta}(\sqrt{3}-4\beta) = 0{,}742157P\,.} \tag{14}$$

Por último, podemos calcular otros resultados adicionales como la flecha del cable bajo A,

$$f_A = a\cosh\frac{x_A}{a} - a = \frac{h}{\beta}(5\beta-1) = 0{,}97666h\,, \tag{15}$$

la longitud del cable entre A y B:

$$S_{AB} = a\operatorname{senh}\frac{x_B}{a} - a\operatorname{senh}\frac{x_A}{a} = 7{,}419778h\,, \tag{16}$$

o la tensión vertical en B:

$$T_{zB} = qa\operatorname{senh}\frac{x_B}{a} = \sqrt{(3P/2)^2 - T_0^2} = 1{,}112792P\,. \tag{17}$$