Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (30 de noviembre del 2009)

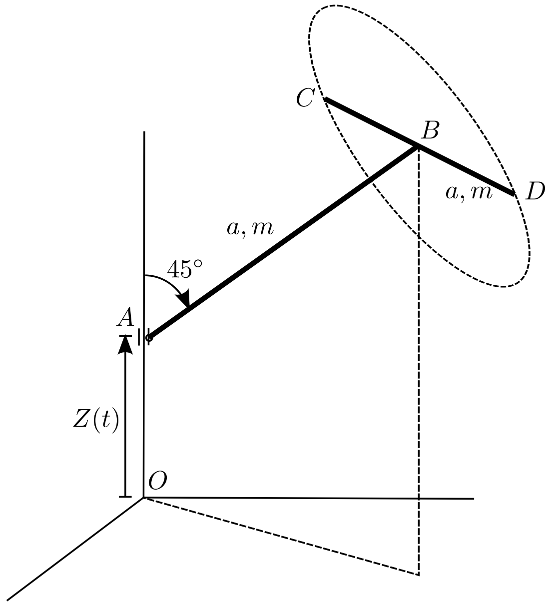
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido está formado por dos barras pesadas iguales AB y CD de longitud a y masa m de forma que la barra CD está soldada por su centro y perpendicularmente al extremo B de la otra barra, formando una "T". El extremo A está articulado a una recta vertical fija, de manera que forma en todo momento un ángulo de 45° con ésta. Además, el punto A del sólido tiene un movimiento impuesto $Z(t)$.

Se pide:

1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sólido
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento



1.— El sólido tiene 2 grados de libertad, que podemos representar por el giro ψ alrededor de la vertical fija por A y el giro propio φ alrededor de AB.

La energía absoluta no se conserva en este caso puesto que existe un movimiento impuesto en A que se realiza a través de una fuerza vertical que no es conservativa.

Una integral primera del movimiento es la conservación de la componente vertical del momento cinético en el punto fijo O, de forma que $\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = cte.$. Esto es así puesto que la reacción en A corta al eje vertical, el peso es vertical, y el momento que hace que AB forme 45° con la vertical es horizontal.

Es interesante observar que el momento cinético respecto a un eje es independiente del punto del eje que se tome como base, por lo que $\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K}$. También es obvio que para que se verifique esta propiedad no influye que el punto A se mueva según el eje, calculando en ambos casos con las velocidades absolutas. Asimismo es fácil comprobar que este momento cinético axial es independiente de una velocidad de traslación en dirección del eje, es decir que también se cumple $\boldsymbol{H}_A^{S_A} \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K}$. El superíndice S_A indica que la magnitud correspondiente es relativa a $S_A = \{A; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$, que es un sistema móvil no inercial que no gira. Este resultado es totalmente general, para cualquier sistema sea o no rígido, y muy fácil de comprobar.

Otra integral primera es la conservación de la energía para un observador en el sistema S_A, puesto que para éste la fuerza de inercia de arrastre no trabaja, ya que puede considerarse aplicada en G que se mueve en un plano horizontal fijo.

2.— Es posible adoptar como ecuaciones del movimiento las dos integrales primeras descritas en el apartado anterior. De forma alternativa, pueden obtenerse también las ecuaciones de Lagrange, equivalentes a las anteriores.

Para el cálculo es conveniente definir dos sistemas de referencia móviles. El primero es el $\{B; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ tal que $\boldsymbol{i}'$ es horizontal, $\boldsymbol{k}'$ lleva la dirección de la barra AB y $\boldsymbol{j}'$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. El segundo triedro $\{B; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ está ligado al sólido, de forma que $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{j}$ lleva la dirección de la barra DC e $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a ambos formando un triedro a derechas, como muestra la Figura 1.

La velocidad de rotación del sólido es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

Adviértase que puesto que el sistema S_A no gira, la velocidad de rotación del sólido relativa a éste coincide con la absoluta. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{k})$ y que $\boldsymbol{j}' = \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$, la velocidad de rotación se expresa en el triedro del cuerpo como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi}(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) + (\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} + \dot{\varphi})\boldsymbol{k} \quad (1)$$

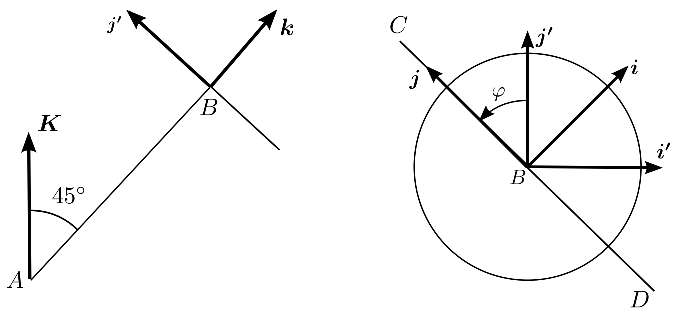


Figura 1: *Definición de los sistemas de referencia móviles auxiliares*

Por otro lado, el tensor de inercia en A se expresa en el triedro del cuerpo como:

$$\boldsymbol{I}_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A = \frac{17}{12}ma^2 \;, \quad B = \frac{4}{3}ma^2 \;, \quad C = \frac{1}{12}ma^2 \;, \tag{2}$$

por lo que la primera ecuación del movimiento resulta:

$$\boldsymbol{H}_A^{SA} \cdot \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\dot{\psi}\left(A\operatorname{sen}^2\varphi + B\cos^2\varphi + C\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}C\dot{\varphi} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{24}ma^2\dot{\psi}\left(17 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{1}{12\sqrt{2}}ma^2\dot{\varphi} = cte. \tag{4}$$

Puede establecerse una segunda ecuación del movimiento expresando la conservación de la energía relativa al sistema S_A. El potencial gravitatorio en este sistema es constante ya que G se mueve en un plano horizontal fijo, por lo que resulta:

$$E^{S_A} = T^{S_A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{2}B\dot{\psi}^2\cos^2\varphi + C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} + \dot{\varphi}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{48}ma^2\dot{\psi}^2(17 + \operatorname{sen}^2\varphi) + \frac{1}{24}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12\sqrt{2}}ma^2\dot{\psi}\dot{\varphi} = \text{cte.} \tag{5}$$

Alternativamente, se podría haber calculado la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange, en el sistema S_A. La Lagrangiana coincide en este caso con la energía cinética obtenida antes (5), $L^{S_A} = T^{S_A}$. Se observa inmediatamente que ψ es una coordenada cíclica. La integral primera correspondiente es

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{1}{24}ma^2\dot{\psi}\left(17 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{1}{12\sqrt{2}}ma^2\dot{\varphi}\,, \tag{6}$$

que coincide con la obtenida antes (4) de conservación del momento cinético respecto a OZ.

La ecuación de Lagrange para $\dot{\varphi}$ sería

$$\frac{1}{12}ma^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\right) - \frac{1}{48}ma^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}2\varphi = 0\,. \tag{7}$$