Mecánica

EXAMEN PARCIAL (8 de marzo del 2010)

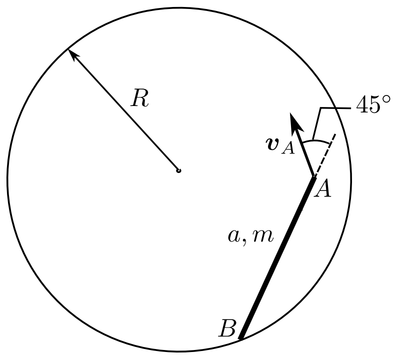
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB pesada de masa m y longitud a se mueve contenida en todo momento en un plano vertical fijo, de forma que B desliza sobre una circunferencia vertical fija y lisa de radio R y la velocidad del extremo A siempre forma 45° con la varilla.

Se pide:

1. Elegir justificadamente un conjunto de parámetros que representen los grados de libertad del sistema, y expresar en función de ellos la ecuación de ligadura asociada a la restricción de la velocidad de A.
2. Obtener la Lagrangiana del sistema.
3. Obtener las ecuaciones del movimiento del sistema.



1.- Se escogen dos parámetros para representar la configuración del sistema: el ángulo φ que forma $\overrightarrow{OB}$ con la vertical descendente (siendo O el centro de la circunferencia), y el ángulo θ que forma $\overrightarrow{BA}$ con la dirección horizontal hacia la derecha.

Sea $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ un sistema móvil tal que $\boldsymbol{i}$ tiene la dirección y el sentido de $\overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{j}$ es ortogonal a la varilla y $\boldsymbol{k}$ sale del papel. La velocidad de A en este sistema es

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + a\dot{\theta}\boldsymbol{j}, \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{v}_B = R\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\boldsymbol{i} - R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\boldsymbol{j}.$$

Para que $\boldsymbol{v}_A$ forme 45º con la varilla es necesario que $\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{i} - \boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{j} = 0$ (también sería correcto $\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{j} = 0$). Por tanto, la ligadura se puede expresar como

$$\Phi \equiv R\left[\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{sen}(\theta-\varphi)\right]\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0. \tag{1}$$

2.- La Lagrangiana del sistema es $L = T - V$, siendo V la energía potencial debida al campo gravitatorio,

$$V = mg\left(-R\cos\varphi + \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right),$$

y T la energía cinética. Ésta última puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{24}ma^2\dot{\theta}^2,$$

siendo v_G el módulo de la velocidad del centro de masas de la varilla,

$$\boldsymbol{v}_G^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\theta}^2 - aR\dot{\varphi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi).$$

Por tanto, la Lagrangiana resulta

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}maR\dot{\varphi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - mg\left(-R\cos\varphi + \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right).$$

3.- La evolución del movimiento queda determinada por la ligadura del primer apartado junto con las ecuaciones de Lagrange

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda R\left[\cos(\theta-\varphi) + \operatorname{sen}(\theta-\varphi)\right] \quad \text{y} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\lambda a,
\end{aligned}
$$

donde se ha introducido el multiplicador λ. Estas derivadas resultan

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) &= mR^2\ddot\varphi - \frac{1}{2}maR\left[\ddot\theta\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + \dot\theta(\dot\theta-\dot\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right], \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2}maR\dot\varphi\dot\theta\cos(\theta-\varphi) - mgR\operatorname{sen}\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) &= \frac{1}{3}ma^2\ddot\theta - \frac{1}{2}maR\left[\ddot\varphi\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + \dot\varphi(\dot\theta-\dot\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right] \quad \text{y} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}maR\dot\varphi\dot\theta\cos(\theta-\varphi) - mg\frac{a}{2}\cos\theta\ ,
\end{aligned}
$$

y las ecuaciones del movimiento son:

$$
\begin{aligned}
&mR^2\ddot\varphi - \frac{1}{2}maR\ddot\theta\operatorname{sen}(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}maR\dot\theta^2\cos(\theta-\varphi) + mgR\operatorname{sen}\varphi = \lambda R\left[\cos(\theta-\varphi) + \operatorname{sen}(\theta-\varphi)\right] \\
&\frac{1}{3}ma^2\ddot\theta - \frac{1}{2}maR\ddot\varphi\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + \frac{1}{2}maR\dot\varphi^2\cos(\theta-\varphi) + mg\frac{a}{2}\cos\theta = -\lambda a
\end{aligned}
$$

junto a la ecuación de ligadura (1), definiendo un sistema de ecuaciones algebraico-diferencial en $\varphi(t), \theta(t)$ y $\lambda(t)$.