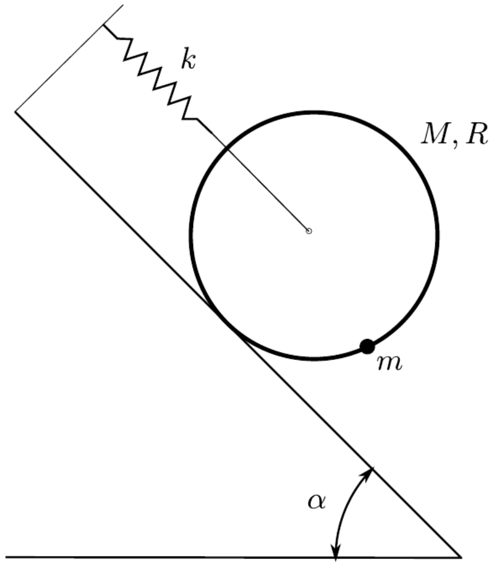
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (31 de mayo del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

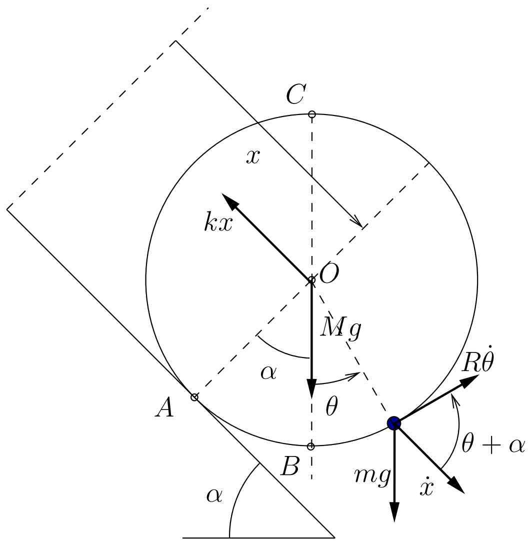
Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado de masa M y radio R se mueve dentro de un plano vertical fijo rodando sin deslizar sobre una recta que forma un ángulo α con la horizontal. El centro del disco se encuentra unido mediante un resorte de longitud natural nula y constante k a un punto fijo que se encuentra a una distancia R sobre la recta. Además, una partícula pesada de masa m se mueve en el borde del disco con ligadura bilateral lisa. Se pide:



1. Determinar todas las posiciones de equilibrio del sistema y discutir su estabilidad.
2. Obtener las ecuaciones correspondientes a la dinámica de los pequeños movimientos alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Obtener las frecuencias propias de vibración del sistema para el caso en que $\alpha = 45°$, $M = m/3$ y $k = mg/(2R)$

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, para los que tomaremos la extensión del muelle x y el ángulo que determina la posición de la partícula m respecto de la vertical descendente, θ. Para obtener la posición de equilibrio hacemos notar en primer lugar que la partícula debe estar situada en un punto del borde del disco con tangente horizontal, es decir $\theta = 0$ (punto B) ó $\theta = \pi$ (punto C). Este último claramente es inestable, mientras que B es estable. Para determinar x en el equilibrio basta tomar momentos en el punto A de contacto de disco y recta, con $\theta = \{0, \pi\}$:



$$-(M+m)gR\operatorname{sen}\alpha + kxR = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{(M+m)g\operatorname{sen}\alpha}{k}\,.$$

Podemos estudiar analíticamente el equilibrio a partir de la expresión del potencial,

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}kx^2 - Mgx\operatorname{sen}\alpha - mg(x\operatorname{sen}\alpha + R\cos\theta) \tag{1}$$

siendo las derivadas

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx - (M+m)g\operatorname{sen}\alpha\,; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgR\operatorname{sen}\theta\,, \tag{2}$$

que igualadas a cero dan las posiciones de equilibrio antes citadas. Las derivadas segundas valen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k\,; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgR\cos\theta\,; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = 0\,. \tag{3}$$

Se comprueba fácilmente que la matriz Hessiana formada por estas derivadas segundas es definida positiva (mínimo de potencial, estable) para $\theta = 0$ mientras que en $\theta = \pi$ no lo es.

2.— La energía cinética vale

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha))\,. \tag{4}$$

Las ecuaciones linealizadas se pueden expresar mediante las matrices de masa y rigidez, cuyas componentes son las derivadas segundas de T y V particularizadas en la posición de equilibrio:

$$M_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = \frac{3}{2}M + m\,; \quad M_{12} = M_{21} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}\partial\dot{\theta}} = MR\cos\alpha\,; \quad M_{22} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = mR^2\,. \tag{5}$$

$$K_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k\,; \quad K_{12} = K_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = 0\,; \quad K_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgR\,. \tag{6}$$

Las ecuaciones son, en forma matricial,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & mR\cos\alpha \\ mR\cos\alpha & mR^2 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} x' \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\,. \tag{7}$$

En estas ecuaciones x' es la coordenada medida respecto de la posición de equilibrio estable, un simple cambio de origen de coordenadas, $x' = x - \frac{(M+m)g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{k}$.

3.— Sustituyendo los datos del enunciado,

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m & \frac{mR}{\sqrt{2}} \\ \frac{mR}{\sqrt{2}} & mR^2 \end{pmatrix}\;; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \frac{mg}{2R} & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

La matriz característica y el polinomio característico en función de un autovalor λ son

$$[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \frac{mg}{2R} - \lambda\frac{3}{2}m & -\lambda\frac{mR}{\sqrt{2}} \\ -\lambda\frac{mR}{\sqrt{2}} & mgR - \lambda mR^2 \end{pmatrix}\;; \tag{9}$$

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = \lambda^2 \cdot m^2R^2 - \lambda \cdot 2m^2gR + \frac{1}{2}m^2g^2 = 0\,. \tag{10}$$

Las raíces de este polinomio son los cuadrados de las frecuencias propias:

$$\lambda_{\{1,2\}} = \frac{g}{R}(1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \Rightarrow \quad \omega_{\{1,2\}} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}}\,. \tag{11}$$

Aunque no lo pide el enunciado obtendremos también los modos normales de vibración asociados a estas frecuencias propias. Para el primero, asociado al signo $-$ en (11), se desarrolla

$$([\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_1\} = \frac{mg}{R}\begin{pmatrix} -1 + 3\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{R}{2}(\sqrt{2}-1) \\ -\frac{R}{2}(\sqrt{2}-1) & \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\,, \tag{12}$$

y considerando $a_{1,1} = 1$ se obtiene $a_{1,2} = \frac{1}{R}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Haciendo el mismo cálculo para el otro modo se obtiene finalmente

$$\{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{R}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{Bmatrix}\;; \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{R}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{Bmatrix}\,. \tag{13}$$