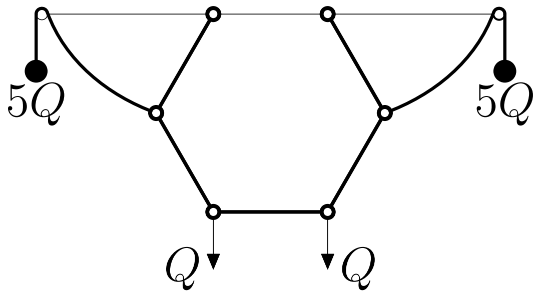
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (31 de mayo del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sistema formado por cinco barras iguales de peso despreciable, articuladas en sus nudos y en los puntos de suspensión, tiene aplicados en los extremos de la barra inferior, unos pesos iguales de valor Q. Los nudos intermedios están unidos a unos cables de peso q por unidad de longitud, que pasan por unas poleas fijas, estando sus extremos sometidos a unos contrapesos de valor $5Q$.

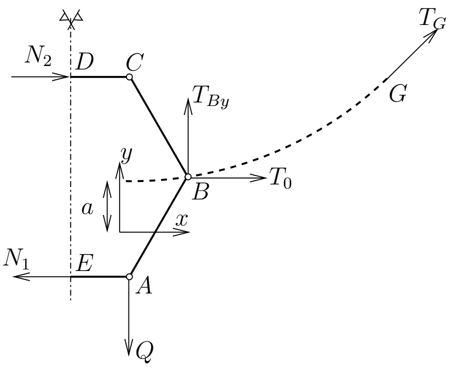


La figura de equilibrio del sistema es un hexágono regular, siendo la longitud de las barras $l = 2$ y la relación $Q/q = 5l$.

Se pide:

1. Configuración de equilibrio de los cables.
2. Distancia horizontal entre las poleas.
3. Longitud de la catenaria de cada uno de los cables.

NOTA: Se despreciará el peso de la parte vertical de los cables que soportan los contrapesos.



1.— Debido a la simetría existente sólo se analiza la mitad de la estructura, tal y como se muestra en la figura adjunta. Aislando el sistema formado por las barras EA y AB, e imponiendo que el momento de las fuerzas en B es nulo, se obtiene N_1:

$$N_1 l \operatorname{sen} 60^\circ - Ql\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{Q\sqrt{3}}{3} \,. \tag{1}$$

Considerando ahora el semi–hexágono de la figura, tomando momentos en C:

$$T_0\sqrt{3} + T_{By} = 2Q \,. \tag{2}$$

Planteando en el hilo las ecuaciones de la tensión vertical en B, la tensión en G y la diferencia de cotas entre G y B resulta, respectivamente:

$$T_{By} = qa \operatorname{senh}\frac{x_B}{a} \,, \tag{3}$$

$$5Q = qa\cosh\frac{x_G}{a} \,, \tag{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}l}{2} = a\cosh\frac{x_G}{a} - a\cosh\frac{x_B}{a} \,. \tag{5}$$

De (4) y (5):

$$qa\cosh\frac{x_B}{a} = 5Q - q\frac{\sqrt{3}l}{2}\,. \tag{6}$$

Operando con las expresiones (3) y (6) elevadas al cuadrado, y teniendo en cuenta (2) y la relación $Q/q = 5l$, se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$4T_0^2 - 4\sqrt{3}QT_0 - \left[\left(5 - \frac{\sqrt{3}}{10}\right)^2 - 4\right]Q^2 = 0\,. \tag{7}$$

Tomando la raíz positiva de esta ecuación se obtiene el valor de la tensión horizontal del hilo:

$$T_0 = 3{,}227Q\,. \tag{8}$$

Conocida la tensión horizontal, el parámetro a de la catenaria se obtiene de forma inmediata:

$$a = \frac{T_0}{q} = 32{,}271\,. \tag{9}$$

La posición del vértice de la catenaria la define x_B, que calculamos mediante el valor obtenido de a y las ecuaciones (3) y (2),

$$qa\,\mathrm{senh}\frac{x_B}{a} = 2Q - T_0\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_B = -30{,}934\,. \tag{10}$$

El resultado indica que B se sitúa a la izquierda del vértice de la catenaria (al contrario de como se ha definido en la figura anterior). La catenaria *cuelga* entre los puntos B y G con el vértice entre ambos puntos.

2.— Para obtener la distancia entre las poleas, calculamos la abcisa del punto G, de la ecuación (4):

$$\cosh\frac{x_G}{a} = \frac{5Q}{aq} \quad \Rightarrow \quad x_G = 32{,}443\,. \tag{11}$$

La distancia pedida d es:

$$d = 2(x_G - x_B) + 2l\cos 60^\circ + l = 130{,}755\,. \tag{12}$$

3.— La longitud de cada cada tramo de catenaria es:

$$s = a\,\mathrm{senh}\frac{x_G}{a} - a\,\mathrm{senh}\frac{x_B}{a} = 74{,}086\,. \tag{13}$$