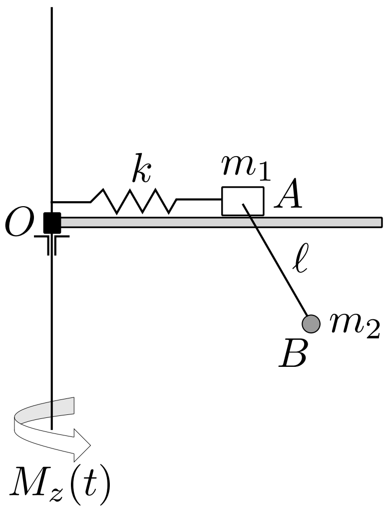
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (24 de junio del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla sin masa gira perpendicular a un eje vertical por uno de sus extremos O debido a la acción de un momento variable con el tiempo $M_z(t)$. Sobre la varilla se mueve sin rozamiento una deslizadera A con masa m_1 unida al extremo de la varilla O mediante un muelle de constante k y longitud natural nula. De la deslizadera A cuelga un péndulo de longitud ℓ y masa puntual m_2 en el extremo B. Este péndulo sólo admite oscilaciones en el plano definido por la varilla y su eje de giro vertical.



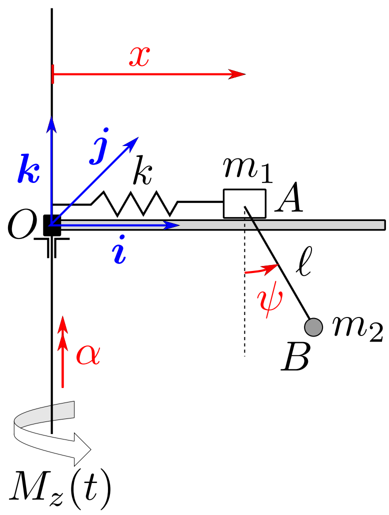
Para el sistema así definido se pide:

1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Expresiones de la energía cinética y de la energía potencial en función de las coordenadas generalizadas elegidas y sus derivadas.
3. Obtener las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas elegidas. Identificar las componentes conservativas y no conservativas.
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

⋆

1.— El movimiento del sistema se define utilizando las coordenadas generalizadas $\{\alpha, x, \phi\}$ siendo (ver figura):

- α: giro de la varilla alrededor del eje vertical.
- x: desplazamiento de la deslizadera A sobre la varilla.
- ψ: giro del péndulo respecto de la vertical descendente.



2.— Definimos un sistema de ejes móviles $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ que acompañan el movimiento de la varilla de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ está orientado con el eje de la varilla, el versor $\boldsymbol{k}$ es vertical y el versor $\boldsymbol{j}$ se define para que el triedro sea a derechas.

La energía cinética total es la suma de la energía cinética de la deslizadera A y de la masa concentrada B:

$$T = T^A + T^B = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2$$

siendo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_A &= \dot{\alpha}x\,\boldsymbol{j} + \dot{x}\,\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_A + \dot{\alpha}\,\boldsymbol{k} \wedge \overrightarrow{AB} + (-\dot{\psi}\,\boldsymbol{j}) \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \dot{\alpha}(x + \ell\operatorname{sen}\psi)\boldsymbol{j} + (\dot{x} + \dot{\psi}\ell\cos\psi)\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\ell\operatorname{sen}(\psi)\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned}$$

con lo que la energía cinética total vale:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\alpha}^2 x^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2\ell^2 + 2\dot{x}\dot{\psi}\ell\cos\psi + \dot{\alpha}^2\left(x + \ell\operatorname{sen}\psi\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Asimismo, la energía potencial del resorte y del peso vale:

$$V = -m_2 g\ell\cos\psi + \frac{1}{2}kx^2\,. \qquad (2)$$

3.— Para obtener las fuerzas generalizadas observamos que, de las fuerzas actuantes, los pesos y la fuerza atractiva del muelle son conservativas y la única fuerza no conservativa es el momento de rotación $M_z(t)$. A partir de la expresión del potencial (2) podemos obtener la parte conservativa de las fuerzas generalizadas como:

$$\begin{aligned}
Q_\alpha^c &= -\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0\,,\\
Q_x^c &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx\,,\\
Q_\psi^c &= -\frac{\partial V}{\partial \psi} = -m_2 g\ell\operatorname{sen}\psi\,.
\end{aligned}$$

Para obtener la parte no conservativa de las fuerzas generalizadas calculamos el trabajo virtual realizado por el momento de rotación M_z:

$$\delta W_{M_z} = M_z\,\delta\alpha\,,$$

lo que nos permite obtener la parte no conservativa de las fuerzas generalizadas:

$$\begin{aligned}
Q_\alpha^{nc} &= M_z\,,\\
Q_x^{nc} &= 0\,,\\
Q_\psi^{nc} &= 0\,.
\end{aligned}$$

4.— Para obtener las ecuaciones del movimiento partimos de la función Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
L &= T - V\\
&= \frac{1}{2}m_1(\dot{\alpha}^2 x^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2\ell^2 + 2\dot{x}\dot{\psi}\ell\cos\psi + \dot{\alpha}^2\left(x + \ell\operatorname{sen}\psi\right)^2\right] + m_2 g\ell\cos\psi - \frac{1}{2}kx^2\,,
\end{aligned} \qquad (3)$$

siendo las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} &= Q_\alpha^{nc} = M_z(t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x^{nc} = 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} &= Q_\psi^{nc} = 0
\end{aligned}$$

Operando a partir de la expresión (3) obtenemos las ecuaciones del movimiento buscadas:

$$\begin{aligned}
(\alpha) &\;\rightarrow\; \ddot{\alpha}\left[m_1 x^2 + m_2(x + \ell\operatorname{sen}\psi)^2\right] + 2\dot{\alpha}\left[m_1 x\dot{x} + m_2(x + \ell\operatorname{sen}\psi)(\dot{x} + \ell\dot{\psi}\cos\psi)\right] = M_z(t)\\
(x) &\;\rightarrow\; (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ell\ddot{\psi}\cos\psi - m_2\ell\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\psi - \dot{\alpha}^2\left[m_1 x + m_2(x + \ell\operatorname{sen}\psi)\right] + kx = 0\\
(\psi) &\;\rightarrow\; m_2\ell^2\ddot{\psi} + m_2\ell\ddot{x}\cos\psi - m_2\dot{\alpha}^2(x + \ell\operatorname{sen}\psi)\ell\cos\psi + m_2 g\ell\operatorname{sen}\psi = 0\,.
\end{aligned}$$