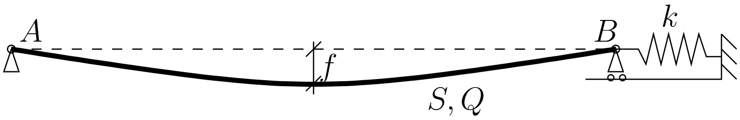
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (24 de junio del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.



Se considera un cable de longitud $S = 50$ m y peso $Q = 500$ N homogéneo, inextensible y perfectamente flexible. Sus extremos A y B están anclados a la misma altura, con el punto A fijo y el B en un apoyo elástico que permite movimiento horizontal con constante de resorte k. La acción del cable sometido a su propio peso produce un desplazamiento en el apoyo $\Delta x = 1$ m, observándose asimismo que en el equilibrio la flecha del cable vale también $f = 1$ m. Se pide:

1. Valor de la constante k del resorte, así como de la luz o distancia horizontal entre los extremos A y B del cable.
2. Se cuelga del cable un peso puntual deslizante P, observándose que en la nueva configuración de equilibrio el desplazamiento total del apoyo pasa a valer $\Delta x = 2$ m. Calcular el valor de P así como la flecha que se produce en el cable en esta nueva situación.

1.— Denominaremos L a la luz entre A y B. Expresamos las ecuaciones que resultan de la longitud del cable y de su flecha:

$$a \cosh \frac{L/2}{a} = a + f \tag{1}$$

$$a \operatorname{senh} \frac{L/2}{a} = \frac{S}{2} \tag{2}$$

Empleando la conocida relación $\cosh^2(\bullet) = 1 + \operatorname{senh}^2(\bullet)$ se obtiene

$$\left(1 + \frac{f}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{S/2}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(S/2)^2 - f^2}{2f} = 312\,\mathrm{m}\,. \tag{3}$$

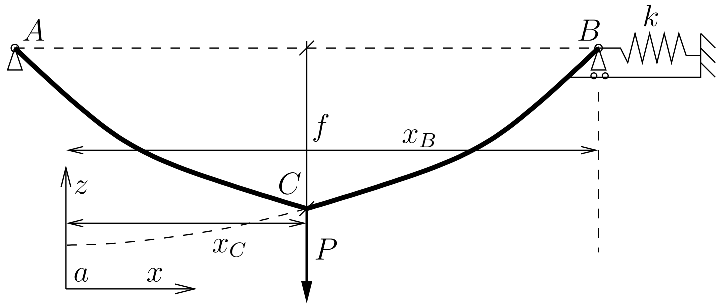
Teniendo en cuenta que la tensión horizontal es $T_0 = qa$ resulta

$$k = \frac{qa}{\Delta x} = \frac{(Q/S)a}{\Delta x} = 3120\,\mathrm{N/m}\,. \tag{4}$$

Por último la luz se obtiene a partir de la ecuación (2),

$$L = 2a \operatorname{argsenh} \frac{S/2}{a} = 49{,}9466\,\mathrm{m}\,. \tag{5}$$

2.— La carga P se sitúa en el centro del cable, que formará dos arcos simétricos de catenaria. La posición del vértice (tangente horizontal) de la catenaria define el origen de abscisas en la ecuación de cada una de las catenarias, siendo esta posición x_C a priori desconocida. La expresión de la longitud del cable proporciona una ecuación,



$$a \operatorname{senh} \frac{x_B}{a} - a \operatorname{senh} \frac{x_C}{a} = \frac{S}{2} \,. \qquad (6)$$

La nueva elongación del resorte $\Delta x_2 = 2$ proporciona otra ecuación; teniendo en cuenta que antes valía $\Delta x_1 = 1$, la luz calculada en (5) disminuye ahora en 1 m:

$$2(x_B - x_C) = L - 1 \,. \qquad (7)$$

El parámetro de la catenaria es conocido, $a = k\Delta x_2/q = 624$ m. El problema queda planteado con las ecuaciones (6), (7) para las dos incógnitas (x_C, x_B).

Eliminando x_B mediante (7) en (6), desarrollando el seno hiperbólico de la suma ($\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b$), y empleando la nueva incógnita $\alpha = \operatorname{senh}(x_C/a)$ para simplificar las expresiones:

$$\alpha \cosh \frac{L-1}{2a} + \sqrt{1+\alpha^2} \operatorname{senh} \frac{L-1}{2a} - \alpha = \frac{S/2}{a} \,. \qquad (8)$$

Despejando en esta ecuación el radical resulta una ecuación cuadrática en α:

$$\alpha^2 \cdot 2\Big(1 - \cosh \frac{L-1}{2a}\Big) + \alpha \cdot 2\frac{S/2}{a}\Big(1 - \cosh \frac{L-1}{2a}\Big) + \Big(\frac{S/2}{a}\Big)^2 - \operatorname{senh}^2 \frac{L-1}{2a} = 0 \,. \qquad (9)$$

Esta ecuación tiene una única solución positiva,

$$\alpha = 0{,}188263 \,, \qquad (10)$$

y volviendo a las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$x_C = 116{,}7931 \,; \quad x_B = 141{,}2664 \,. \qquad (11)$$

Teniendo en cuenta la simetría, la tensión vertical en cada una de las ramas de catenaria en C valdrá $P/2$:

$$qa \operatorname{senh} \frac{x_C}{a} = \frac{P}{2} \quad \Rightarrow \quad P = 2349{,}52\,\mathrm{N} \,. \qquad (12)$$

Finalmente, la flecha se calcula mediante

$$f = a \cosh \frac{x_B}{a} - a \cosh \frac{x_C}{a} = 5{,}0970\,\mathrm{m} \,. \qquad (13)$$