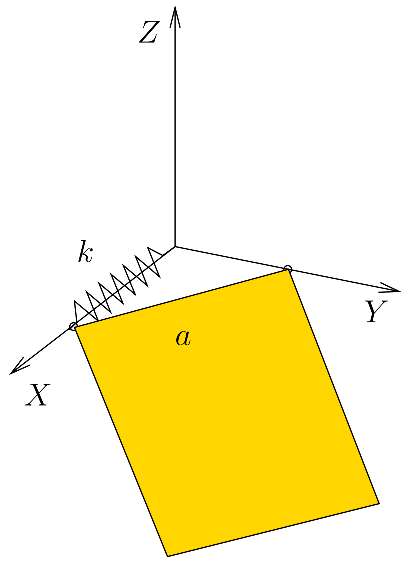
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (24 de junio del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

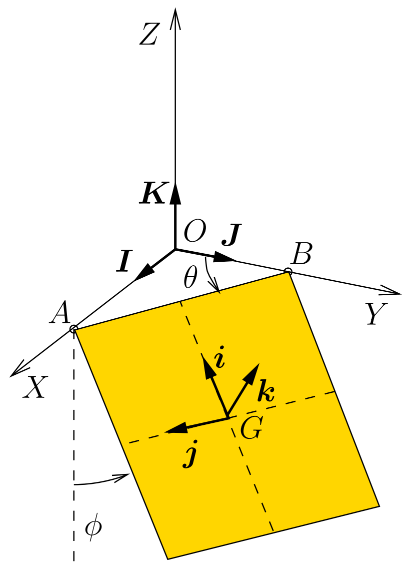
El sistema mecánico de la figura está formado por una placa cuadrada pesada de masa m y lado a, y un muelle de constante k y longitud natural nula que une el origen del sistema de referencia y uno de los vértices de la placa. Dos vértices contiguos de la placa pueden deslizar libremente sobre los ejes lisos x e y.



Se pide:

1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Integrales primeras
3. Ecuaciones del movimiento.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad. Como coordenadas generalizadas podemos tomar, por ejemplo, el giro θ del lado AB de la placa en el plano OXY y el giro ϕ de la placa alrededor de AB. Con la ayuda del triedro unido al cuerpo $Gxyz$ y teniendo en cuenta $\boldsymbol{K} = \cos\phi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k}$ la velocidad angular es



$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta\,\boldsymbol{K} + \dot\phi\,\boldsymbol{j} = \dot\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \dot\phi\,\boldsymbol{j} + \dot\theta\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{k}\,. \qquad (1)$$

2.— Las fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso y la del resorte, ambas conservativas. Las ligaduras son lisas, por lo que se conserva la energía,

$$E = T + V = \text{cte}. \qquad (2)$$

En este caso no se conservan otras magnitudes cinéticas por lo que esta será la única integral primera.

La energía cinética se desarrolla como

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}\,; \qquad (3)$$

debemos obtener primero la velocidad del centro G de la placa,

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AG}\,, \qquad (4)$$

y teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{v}_A = a\dot\theta\cos\theta\,\boldsymbol{I} = a\dot\theta\cos\theta(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{k}) \qquad (5)$$

resulta
$$\boldsymbol{v}_G = -\frac{a}{2}\dot\theta \operatorname{sen}\phi\cos 2\theta\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\dot\theta(\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}\phi)\boldsymbol{j} + \frac{a}{2}(\dot\theta\cos\phi\cos 2\theta + \dot\phi)\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

El tensor de inercia en los ejes del cuerpo es

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{12}ma^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\,, \tag{7}$$

con lo que desarrollando las expresiones resulta

$$T = \frac{ma^2}{12}\dot\theta^2[2(1+\operatorname{sen}^2\phi) - 3\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\phi] + \frac{ma^2}{6}\dot\phi^2 + \frac{ma^2}{4}\dot\theta\dot\phi\cos 2\theta\cos\phi\,. \tag{8}$$

La energía potencial es
$$V = \frac{1}{2}ka^2\operatorname{sen}^2\theta - mg\frac{a}{2}\cos\phi\,, \tag{9}$$

por lo que la expresión de la conservación (2) es

$$\begin{aligned}E = T + V = \frac{ma^2}{12}\dot\theta^2[2(1+\operatorname{sen}^2\phi) - 3\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\phi] + \frac{ma^2}{6}\dot\phi^2 + \frac{ma^2}{4}\dot\theta\dot\phi\cos 2\theta\cos\phi\\ + \frac{1}{2}ka^2\operatorname{sen}^2\theta - mg\frac{a}{2}\cos\phi\,.\end{aligned} \tag{10}$$

3.— Podemos obtener las dos ecuaciones de Lagrange del movimiento, a partir de la Lagrangiana

$$\begin{aligned}L = T - V = \frac{ma^2}{12}\dot\theta^2[2(1+\operatorname{sen}^2\phi) - 3\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\phi] + \frac{ma^2}{6}\dot\phi^2 + \frac{ma^2}{4}\dot\theta\dot\phi\cos 2\theta\cos\phi\\ - \frac{1}{2}ka^2\operatorname{sen}^2\theta + mg\frac{a}{2}\cos\phi\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Las ecuaciones resultan:

$$\begin{aligned}&\frac{ma^2}{6}\ddot\theta[2(1+\operatorname{sen}^2\phi) - 3\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\phi] + \frac{ma^2}{6}\dot\theta\dot\phi[2\operatorname{sen}2\phi - 3\operatorname{sen}2\theta\cos\phi]\\ &\quad - \frac{ma^2}{2}\dot\theta^2\cos 2\theta\operatorname{sen}\phi + \frac{ma^2}{4}\ddot\phi\cos 2\theta\cos\phi - \frac{ma^2}{4}\dot\phi^2\cos 2\theta\operatorname{sen}\phi + ka^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0\,;\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{ma^2}{3}\ddot\phi + \frac{ma^2}{4}\ddot\theta\cos 2\theta\cos\phi - \frac{ma^2}{6}\dot\theta^2\operatorname{sen}2\phi - \frac{ma^2}{4}\dot\theta^2\operatorname{sen}2\theta\cos\phi + mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi = 0\,. \tag{13}$$

También podría haberse empleado la ecuación de conservación (10) como una de las ecuaciones del movimiento, en sustitución de una de las (12) ó (13).