Mecánica

EXAMEN PARCIAL (1 de diciembre del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera una balanza formada por un platillo de masa m sobre un resorte elástico. En el platillo está colocada una masa $M = 8m$, y en esta configuración (es decir, con $m + M$) se conoce que la frecuencia natural sin amortiguamiento es 1 Hz y que el sistema tiene un amortiguamiento viscoso 5 % del crítico. Estando inicialmente el sistema en equilibrio, se retira de forma instantánea la masa M con lo cual la balanza se pone en movimiento. Se pide:

1. Expresar la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones iniciales del mismo, obteniendo los parámetros de dicha ecuación en función de los datos del problema.
2. Resolver la ecuación anterior obteniendo de forma explícita el movimiento de la balanza en función del tiempo. Estudiar la respuesta para $t \to \infty$.
3. Suponiendo que el amortiguamiento sea despreciable, obtener el máximo desplazamiento de la balanza con relación a la posición de equilibrio inicial.

⋆

§1. La balanza se encuentra en equilibrio bajo el peso $-(M + m)g$. Al retirarse M pierde el equilibrio y se pondrá en movimiento desde esa posición como si actuase una fuerza $+Mg$ que la desvía de la posición inicial. Los datos del enunciado de frecuencia propia y amortiguamiento (ω_0^*, ζ^*) se refieren al sistema con las dos masas, por tanto

$$\omega_0^* = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 2\pi\,\mathrm{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0^*\sqrt{\frac{M+m}{m}} = 6\pi\,\mathrm{rad/s}\,; \tag{1}$$

$$\zeta^* = \frac{c}{2\sqrt{k(M+m)}} = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \zeta^*\sqrt{\frac{M+m}{m}} = 0{,}15\,. \tag{2}$$

Para definir el movimiento tomaremos la coordenada x desde la posición inicial, y con sentido positivo hacia arriba. La ecuación diferencial será

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{M}{m}g\,, \tag{3}$$

con las condiciones iniciales $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Alternativamente, se podría escoger la coordenada y medida desde la nueva posición de equilibrio del sistema sin el peso de M. Esta alternativa supone un simple cambio de origen de coordenadas, siendo $y = x - Mg/k$. La ecuación diferencial sería entonces

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0\,, \tag{4}$$

con las condiciones iniciales $y_0 = -Mg/k = -Mg/(m\omega_0^2)$, $\dot{y}_0 = 0$.

§2. La solución general es suma de la general de la homogénea y la particular de la completa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p\,, \tag{5}$$

$$x_h(t) = A\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad x_p = \frac{Mg}{m\omega_0^2} = \frac{2g}{9\pi^2} = 0{,}22088\,\mathrm{m}\,, \tag{6}$$

con $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ y tomando $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$. Al cabo de suficiente tiempo ($t \to \infty$) la solución x_h se desvanece y queda solo x_p que es constante. Este valor definirá por tanto la posición final de equilibrio, quedando al cabo del tiempo el platillo en reposo y a esa distancia sobre de la posición inicial.

Las constantes (A, φ) se obtienen considerando las condiciones iniciales:

$$0 = x(0) = A\cos\varphi + x_p \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 0 = \dot{x}(0) &= \left[-A\zeta\omega_0\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi) - A\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)\right]_{t=0} \\ &= -A\omega_0\left(\zeta\cos\varphi + \sqrt{1-\zeta^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right). \end{aligned} \tag{8}$$

De estas expresiones se deduce

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = -8{,}6269^\circ\ : \tag{9}$$

$$A = -\frac{x_p}{\cos\varphi} = -\frac{x_p}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -0{,}223408\,\mathrm{m}\,. \tag{10}$$

§3. En este caso sería $\zeta = 0$, particularizando la solución de (5), (6) el movimiento será

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + x_p\,; \qquad x_p = \frac{2g}{9\pi^2}\,, \quad A = -x_p\,. \tag{11}$$

El máximo se produce para $t = \pi/\omega_0 = 1/6$ s y vale

$$x_{\text{máx}} = 2x_p = \frac{4g}{9\pi^2} = 0{,}44176\,\mathrm{m}\,. \tag{12}$$