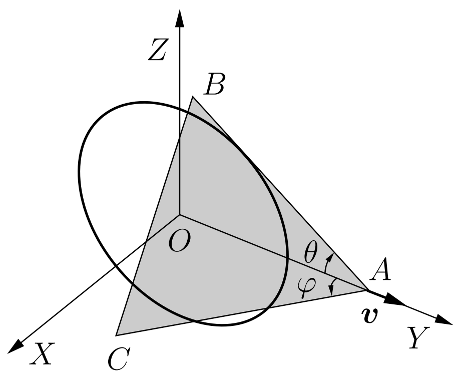
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (1 de diciembre del 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 o 10/45) Tiempo: 60 min.

Una placa triangular equilátera ABC de lado $2a$ se mueve de forma que el punto A recorre el eje OY con velocidad constante $\boldsymbol{v}$, mientras que el lado AB permanece en el plano OYZ apoyándose en la circunferencia de centro O y radio a de dicho plano. Además, el lado AC se mantiene en el plano OXY. Se pide:

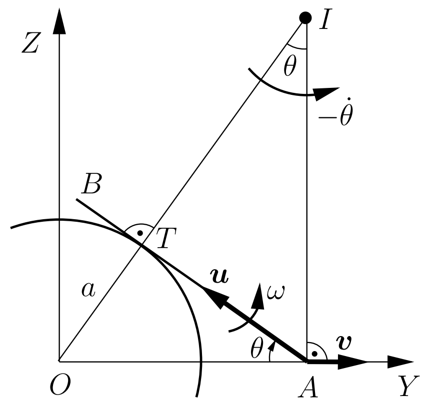


1. Reducir el movimiento del sólido a dos rotaciones, siendo una de ellas la correspondiente al lado AB en el plano OYZ. Obtener la velocidad angular y el eje helicoidal tangente.
2. Calcular la velocidad del punto C y la aceleración angular de la placa.

Nota: Se recomienda resolver el problema en función de los ángulos θ y φ de la figura, introduciendo posteriormente la relación entre ellos.

⋆

1. El campo de velocidades de la placa puede descomponerse en las dos rotaciones puras instantáneas de la figura: una alrededor del C.I.R. I del movimiento del lado AB en el plano OYZ, y otra respecto a dicho lado AB. Por tanto, la velocidad angular se puede escribir de la forma



$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta}\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{u} = -\cos\theta\boldsymbol{J} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{K}$ el vector unitario según $\overrightarrow{AB}$.

A partir del movimiento plano, tenemos $v = -\dot{\theta}\,\overline{IA}$, siendo $\overline{IA} = \overline{AT}/\operatorname{sen}\theta$, con $\overline{AT} = a/\tan\theta$. Esto es,

$$\dot{\theta} = -\frac{v}{a}\tan\theta\operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Además, la velocidad de C se puede obtener a partir de la de A como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_C =& \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge(2a\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{I} - 2a\cos\varphi\boldsymbol{J}) = \\ & 2a\omega\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\boldsymbol{I} + (v + 2a\omega\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{J} + 2a(\dot{\theta}\cos\varphi + \omega\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{K}.\end{aligned} \tag{3}$$

Para que C se mantenga en OXY, su velocidad según $\boldsymbol{K}$ debe ser nula, y por tanto

$$\omega = -\frac{\dot{\theta}}{\cos\theta\tan\varphi} = \frac{v}{a}\frac{\tan^2\theta}{\tan\varphi}, \tag{4}$$

donde se ha sustituido $\dot{\theta}$ usando (2).

Las variables θ y φ están relacionadas de forma que el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sea 60º. Esto implica, efectuando el producto escalar,

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Por otra parte, la composición de las dos rotaciones descritas no es una rotación instantánea, sino que queda caracterizada por un movimiento helicoidal tangente cuyo eje tiene la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ y pasa por el punto P tal que

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}}{\Omega^2} = -\frac{v}{\dot\theta^2+\omega^2}(\omega\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{I} + \dot\theta\boldsymbol{K}). \tag{6}$$

Obsérvese que la posición de A está relacionada con θ según $\overrightarrow{OA} = (a/\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{J}$. Además, este eje corta al segmento IT por un punto Q a una distancia de I igual a

$$\overline{IQ} = \frac{\omega^2}{\dot\theta^2+\omega^2}\overline{IT} = \frac{a}{\tan^2\theta + \tan^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}. \tag{7}$$

2. La velocidad de C ya ha sido determinada en (3). Recuérdese que ω se calculó en (4), de forma que se anule la componente en $\boldsymbol{K}$.

Por otra parte, la aceleración angular se puede obtener como

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot\theta\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{u}) = -\ddot\theta\boldsymbol{I} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + \omega\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

A su vez, derivando en (2),

$$\ddot\theta = -\frac{v}{a}\dot\theta(2+\tan^2\theta)\operatorname{sen}\theta, \tag{9}$$

donde se referencia de nuevo (2).

Además, usando (4),

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{a}\left(\frac{2\dot\theta\sec^2\theta}{\tan\varphi} - \frac{\dot\varphi\tan\theta}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right)\tan\theta, \tag{10}$$

donde $\dot\varphi$ está relacionado con $\dot\theta$ partiendo de (5) como

$$\dot\varphi = -\dot\theta\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}. \tag{11}$$

Finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{u} = \dot\theta(\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{J} + \cos\theta\boldsymbol{K}). \tag{12}$$