

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (1 de diciembre del 2010)

Apellidos

Nombre

N.º

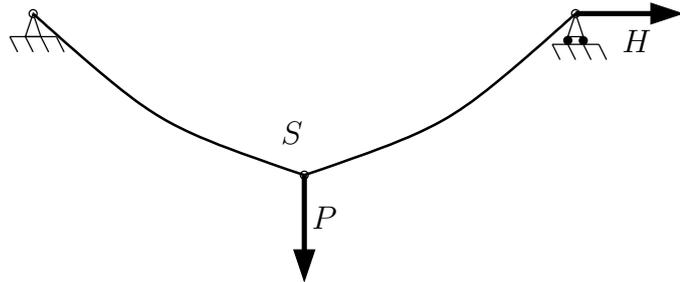
Grupo

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45)

Tiempo: 60 min.

Se considera un cable uniforme y perfectamente flexible de peso total Q y longitud S , anclado entre dos puntos a igual altura. En uno de los extremos se aplica una fuerza horizontal de valor $H = 8Q$. Se pide:



1. Obtener la configuración de equilibrio del cable, calculando la luz horizontal entre apoyos L y la flecha en el centro f en función de S .
2. Calcular la rigidez del cable en relación al movimiento horizontal del apoyo en la configuración de equilibrio dada ($K = dH/dL$).

Supondremos ahora que se cuelga del cable un peso $P = Q$ mediante una argolla lisa, manteniéndose el mismo valor de H en el extremo. Se pide:

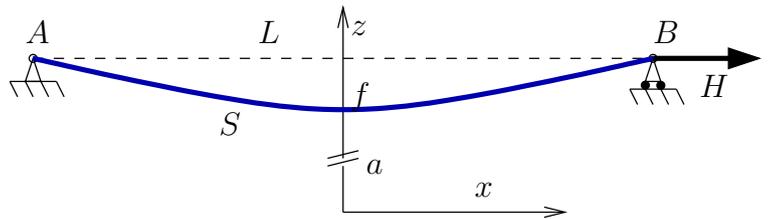
3. Obtener la nueva configuración de equilibrio del cable, calculando la luz L y la flecha f .
4. Calcular la nueva rigidez del sistema $K = dH/dL$.

DATOS NUMÉRICOS: $Q = 5$ kN, $S = 50$ m.

*

§1. El cable forma una catenaria entre los extremos A y B . El dato de la tensión horizontal proporciona el valor del parámetro de la catenaria:

$$a = \frac{H}{q} = \frac{8Q}{Q/S} = 8S. \quad (1)$$



El dato de la longitud del cable permite obtener la luz L :

$$\frac{S}{2} = a \operatorname{senh} \frac{L/2}{a} \Rightarrow L = 2a \operatorname{argsh} \frac{S/2}{a} = 16S \operatorname{argsh} \frac{1}{16} = 0,99935S = 49,9675 \text{ m}. \quad (2)$$

La flecha se calcula mediante

$$f = a \cosh \frac{L/2}{a} - a = \sqrt{a^2 + (S/2)^2} - a = S(\sqrt{64 + 1/4} - 8) = 0,01561S = 0,7805 \text{ m}. \quad (3)$$

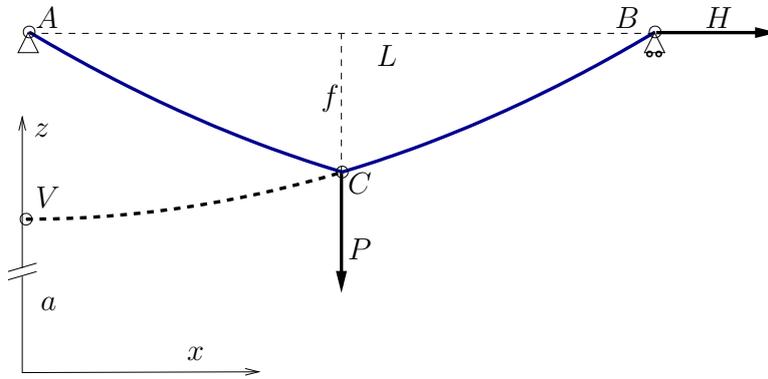
§2. La rigidez se puede obtener derivando la expresión genérica de L de la siguiente forma:

$$K = \frac{dH}{dL} = \frac{dH/da}{dL/da} = \frac{Q/S}{2 \operatorname{argsenh} \frac{S}{2a} - \frac{S}{a} / \sqrt{1 + (\frac{S}{2a})^2}}, \quad (4)$$

y particularizando para el valor de a (1) y los datos numéricos,

$$K = \frac{Q/S}{2 \operatorname{argsenh} \frac{1}{16} - \frac{1}{8} / \sqrt{1 + (\frac{1}{16})^2}} = 6165,6 \frac{Q}{S} = 616,56 \text{ kN/m}. \quad (5)$$

§3. El peso P se sitúa en el centro C del cable, que formará dos ramas simétricas de catenaria, CB y CA . Considerando la rama CB , los extremos estarán situados en las abscisas x_C y x_B desde el vértice de la catenaria. El valor del parámetro a de la catenaria es el mismo antes calculado (1) ya que la tensión horizontal y el peso unitario del cable se mantienen.



Dado que la tensión vertical en C en la rama CB por simetría es $P/2$,

$$qa \operatorname{senh} \left(\frac{x_C}{a} \right) = \frac{P}{2}. \quad (6)$$

Por otra parte, la longitud de cable en este tramo es:

$$a \operatorname{senh} \left(\frac{x_B}{a} \right) - a \operatorname{senh} \left(\frac{x_C}{a} \right) = \frac{S}{2}. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta los datos del problema, de la ecuación (6) se deduce

$$x_C = 8S \operatorname{argsenh} \left(\frac{1}{16} \right) = 0,499675S, \quad (8)$$

y de la ecuación (7)

$$x_B = 8S \operatorname{argsenh} \left(\frac{1}{8} \right) = 0,997414S. \quad (9)$$

De esta forma, la luz vale

$$L = 2(x_B - x_C) = 16S \left[\operatorname{argsenh} \left(\frac{1}{8} \right) - \operatorname{argsenh} \left(\frac{1}{16} \right) \right] = 0,995478S = 49,774 \text{ m}. \quad (10)$$

Teniendo en cuenta los valores de x_C y x_B de (8) y (9) la flecha se calcula como

$$\begin{aligned} f &= a \cosh \left(\frac{x_B}{a} \right) - a \cosh \left(\frac{x_C}{a} \right) = 8S \left[\sqrt{(1/8)^2 + 1} - \sqrt{(1/16)^2 + 1} \right] \\ &= 0,046648S = 2,3324 \text{ m}. \end{aligned} \quad (11)$$

§4. Un incremento de la fuerza H conlleva una variación de $a = H/q$ y producirá un aumento de la luz L . Empleando las ecuaciones (6) y (7), la expresión general de L es

$$L = 2a \left[\operatorname{argsenh} \left(\frac{S}{a} \right) - \operatorname{argsenh} \left(\frac{S}{2a} \right) \right]. \quad (12)$$

Teniendo en cuenta esta relación se puede obtener la rigidez pedida como

$$\begin{aligned} K &= \frac{dH}{dL} = \frac{dH/da}{dL/da} \\ &= \frac{\frac{1}{2}Q/S}{\left[\operatorname{argsenh}(S/a) - S/\sqrt{a^2 + S^2} \right] - \left[\operatorname{argsenh}(S/(2a)) - S/\sqrt{4a^2 + S^2} \right]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Particularizando para la configuración dada, $a = 8S$, resulta el valor

$$K = 891,397 \frac{Q}{S} = 89,1397 \text{ kNm}. \quad (14)$$