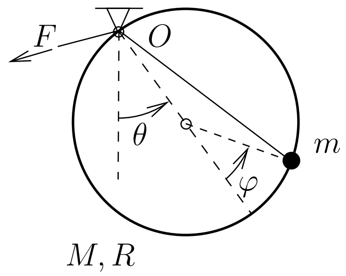
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (9 de Marzo del 2011)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza F constante dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.



Se pide:

1. Expresión de la energía cinética del sistema en función de los grados de libertad y sus derivadas
2. Expresión del trabajo virtual de la fuerza F
3. Expresión de la energía potencial de las fuerzas aplicadas conservativas
4. Discusión razonada de la existencia de integrales primeras
5. Ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema

1.— Definiendo los versores auxiliares $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{T}$ según el cable (dirigido hacia O desde la partícula) y según la perpendicular respectivamente, la velocidad de la partícula se expresa como:

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{T} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N}\right) + 2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}\,\boldsymbol{T} \tag{1}$$

donde el primer paréntesis es el versor tangente al aro donde se encuentra la partícula. La energía cinética resulta:

$$T = T_{\text{aro}} + T_{\text{part}} = \frac{1}{2}2MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\varphi}^2 + 4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right] \tag{2}$$

2.— Un desplazamiento virtual de la partícula compatible con las ligaduras se puede obtener directamente a partir de la expresión de la velocidad (1), resultando:

$$\delta\boldsymbol{r} = R\delta\varphi\left(\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{T} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N}\right) + 2R\cos\frac{\varphi}{2}\delta\theta\,\boldsymbol{T}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza aplicada por el cable sobre la partícula es $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{N}$, su trabajo virtual es:

$$\delta W_F = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = FR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\delta\varphi$$

3.— El peso es conservativo. También $\boldsymbol{F}$ es conservativa, ya que es una fuerza central que no depende del tiempo; siendo además su módulo constante el potencial total resulta:

$$V = -(M+m)gR\cos\theta - mgR\cos(\theta+\varphi) + 2FR\cos\frac{\varphi}{2} \tag{3}$$

4.— Puesto que todas las fuerzas que trabajan sobre el sistema son conservativas, la energía total $E = T + V$ del sistema es constante, que se expresa sumando las ecuaciones (2) y (3). No hay más integrales primeras.

5.— Restando (3) de (2) se obtiene la Lagrangiana del sistema, y las correspondientes ecuaciones de Lagrange resultan:

$$2MR^2\ddot{\theta} + 4mR^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\ddot{\theta} - 2mR^2\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2mR^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\ddot{\varphi} - mR^2\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi}^2 \tag{4}$$

$$+MgR\operatorname{sen}\theta + mgR\left[\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta+\varphi)\right] = 0$$

$$mR^2\ddot{\varphi} + mR^2\ddot{\theta}(1+\cos\varphi) + mR^2\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\theta}^2 + mgR\operatorname{sen}(\theta+\varphi) - FR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = 0 \tag{5}$$