Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN PARCIAL (9 de Marzo del 2011)

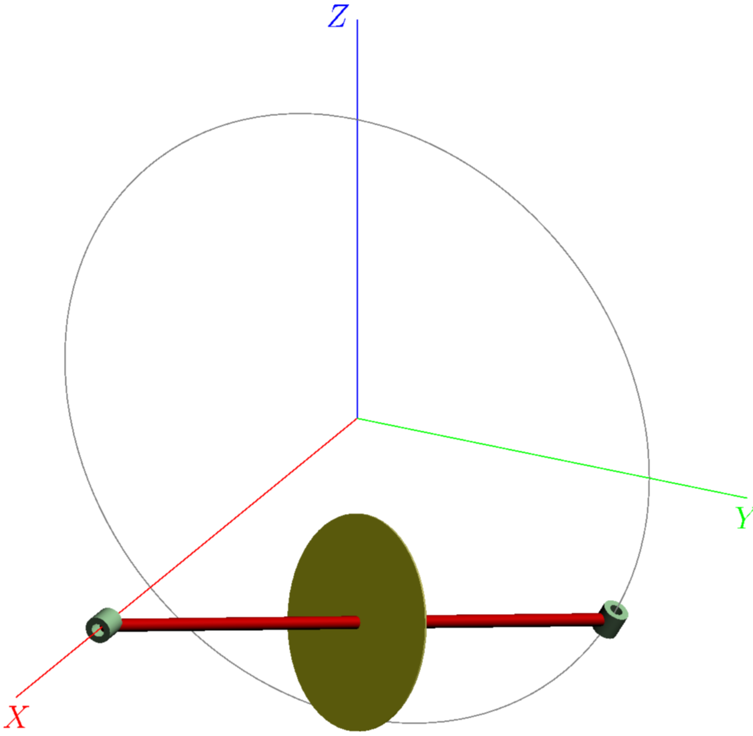
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sólido pesado de la figura está formado por una varilla de masa m y longitud $2R$ y un disco de masa m, radio $R/2$ y ortogonal a la varilla en su punto medio. El sólido se mueve de modo que uno de sus extremos desliza por la circunferencia de radio R, centro el origen y situada en el plano YZ, mientras que el otro extremo puede deslizar por el eje X. (El peso actúa según la dirección del eje Z).

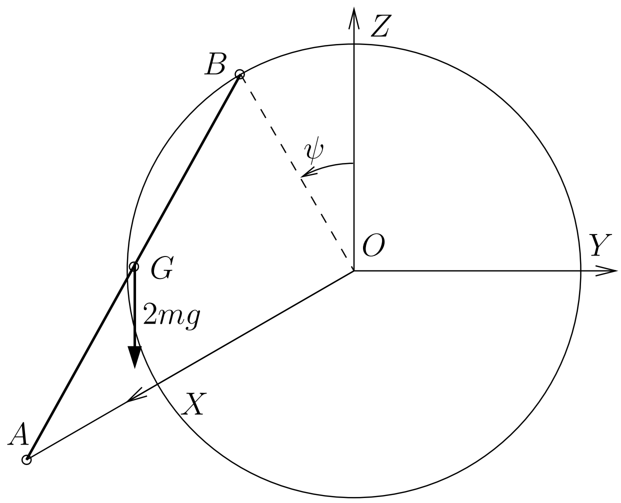
Se pide:

1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Integrales primeras.
3. Ecuaciones del movimiento.
4. Fuerza que hay que aplicar en el extremo de la varilla apoyado en la circunferencia, para que recorra la misma con velocidad uniforme v.



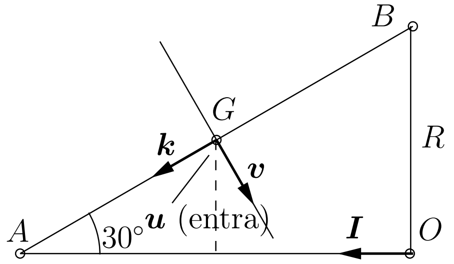
1.— Denominamos A al extremo de la varilla sobre el eje OX y B el de la circunferencia. Observamos que al ser $\overline{OB} = R$ y $\overline{AB} = 2R$, la distancia $\overline{OA}$ es constante y vale $R\sqrt{3}/2$. Es decir, el vértice A permanece fijo y la varilla AB describe un cono de revolución con vértice en A, eje OX y semiángulo $\theta = 30°$.

Los grados de libertad del sólido son dos, tomaremos como coordenadas libres el ángulo ψ (giro de AB alrededor de OX) y la rotación propia φ (alrededor de BA).



2.— Las integrales primeras son dos: 1) todas las fuerzas son conservativas y los enlaces lisos, por lo que se conserva la energía; 2) las fuerzas aplicadas y las reacciones pasan todas por el eje AB y este aunque sea móvil es de revolución del sólido, por lo que se conserva el momento cinético respecto de dicho eje. A continuación desarrollamos las expresiones mediante procedimientos analíticos. En primer lugar, obtenemos los momentos principales de inercia en el centro G:

$$A = B = \frac{1}{4}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{19}{48}mR^2\,; \quad C = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mR^2\,. \tag{1}$$



Consideramos el triedro móvil de la figura $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$, que es un *triedro intermedio* ya que le falta el giro $\varphi\, \boldsymbol{k}$ para moverse con el sólido. En la figura se dibuja el plano OAB en verdadera magnitud. La velocidad de rotación del sólido es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\, \boldsymbol{I} + \dot{\varphi}\, \boldsymbol{k} = \underbrace{-\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta}_{q}\, \boldsymbol{v} + \underbrace{(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})}_{r}\, \boldsymbol{k}\,, \tag{2}$$

donde $\theta = 30°$ e $\boldsymbol{I} = -\operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{v} + \cos\theta\, \boldsymbol{k}$. Teniendo en cuenta que la velocidad del centro de masas es $\boldsymbol{v}_G = (R/2)\dot{\psi}\, \boldsymbol{u}$, la energía cinética vale

$$T = \frac{1}{2}Aq^2 + \frac{1}{2}Cr^2 + \frac{1}{2}(2m)v_G^2 = \frac{115}{384}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{16}mR^2r^2\,. \tag{3}$$

La energía potencial es

$$V = 2mgZ_G = mgR\cos\psi\,, \tag{4}$$

con lo que la Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{115}{384}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{16}mR^2r^2 - mgR\cos\psi\,. \tag{5}$$

Como L no depende de φ esta coordenada es cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{8}mR^2 r = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \text{cte.}} \tag{6}$$

Esta integral primera corresponde a la conservación del momento cinético según el eje móvil $(G, \boldsymbol{k})$, es decir $p_\varphi = \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = H_z$. Por otra parte, la conservación de la energía resulta

$$\boxed{E = T + V = \frac{115}{384}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{16}mR^2r^2 + mgR\cos\psi = \text{cte.}} \tag{7}$$

3.— Como ecuaciones del movimiento podemos tomar precisamente las dos integrales primeras (6) y (7). Podríamos dar también la ecuación de Lagrange en ψ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{115}{192}mR^2\ddot{\psi} - mgR\operatorname{sen}\psi = 0\,.} \tag{8}$$

Observamos que esta ecuación equivale a la derivada de (7) respecto de t, no aporta información adicional.

4.— Suponiendo una fuerza F aplicada en B, tangente a la circunferencia, su trabajo virtual es

$$\delta W = FR\delta\psi \quad \Rightarrow \quad Q_\psi = FR\,. \tag{9}$$

La velocidad uniforme de B equivale a $\dot{\psi} = v/R = \text{cte.}$ Incluyendo la fuerza generalizada en la derecha de la ecuación de Lagrange (8) y sustituyendo $\ddot{\psi} = 0$ resulta

$$-mgR\operatorname{sen}\psi = FR \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = -mg\operatorname{sen}\psi\,.} \tag{10}$$