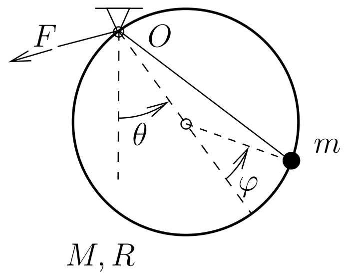
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (3 de junio de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza F constante dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.

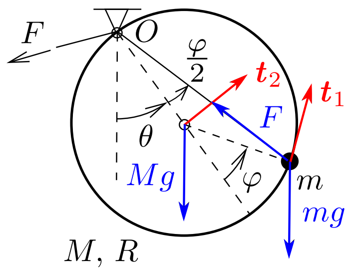


Se pide:

1. Obtener las ecuaciones de los pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio $\theta = 0 = \varphi$, asumiendo que ésta es estable para el valor de F dado.
2. Para el caso en el que $M = m$ y $F = 2mg/3$ obtener las frecuencias propias y modos de vibración de estos pequeños movimientos.

1.- Las fuerzas que actúan en el sistema son el peso del aro, el peso de la partícula y la fuerza central de módulo constante F aplicada sobre la partícula y apuntando hacia O. Las tres fuerzas son conservativas, siendo el potencial total:

$$V = -(M+m)gR\cos\theta - mgR\cos(\theta+\varphi) + 2FR\cos\frac{\varphi}{2} \qquad (1)$$



La energía cinética total del sistema se expresa como:

$$T = T_{\text{aro}} + T_{\text{part}} = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 \qquad (2)$$

siendo $I_O = 2MR^2$ el momento de inercia del aro en el punto fijo O y $\boldsymbol{v}_P$ la velocidad de la partícula que vale (ver figura para versores $\boldsymbol{t}_1$ y $\boldsymbol{t}_2$):

$$\boldsymbol{v}_P = R\dot{\theta}\,\boldsymbol{t}_2 + R(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\boldsymbol{t}_1 \qquad (3)$$

con lo que la expresión de la energía cinética queda:

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\varphi}^2 + 4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right] \qquad (4)$$

A partir de las expresiones (1) y (4) podemos obtener las matrices de masa y de rigidez del sistema como:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}\partial\dot{\varphi}} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{\varphi}\partial\dot{\theta}} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{\varphi}^2} \end{pmatrix}_{\theta=\varphi=0} = \begin{pmatrix} 2MR^2+4mR^2 & 2mR^2 \\ 2mR^2 & mR^2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$
[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix}_{\theta=\varphi=0} = \begin{pmatrix} MgR + 2mgR & mgR \\ mgR & mgR - \dfrac{FR}{2} \end{pmatrix} \tag{6}
$$

En forma matricial las ecuaciones pedidas son:

$$
\begin{pmatrix} 2MR^2 + 4mR^2 & 2mR^2 \\ 2mR^2 & mR^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} MgR + 2mgR & mgR \\ mgR & mgR - \dfrac{FR}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}
$$

2.- Si particularizamos para $M = m$ y $F = 2mg/3$ las expresiones (5) y (6) pasan a ser

$$
[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 6mR^2 & 2mR^2 \\ 2mR^2 & mR^2 \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 3mgR & mgR \\ mgR & \dfrac{2}{3}mgR \end{pmatrix} \tag{8}
$$

La matriz característica y el polinomio característico en función de un autovalor λ son:

$$
([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = \begin{pmatrix} 3mgR - 6\lambda mR^2 & mgR - 2\lambda mR^2 \\ mgR - 2\lambda mR^2 & \dfrac{2}{3}mgR - \lambda mR^2 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

$$
\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 2\lambda^2 - 3\frac{g}{R}\lambda + \frac{g^2}{R^2} = 0 \tag{10}
$$

Las raíces de este polinomio son los cuadrados de las frecuencias propias:

$$
\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{g}{R}; \qquad \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{g}{2R} \tag{11}
$$

Finalmente, los modos normales de vibración asociados a estas frecuencias propias son:

$$
\{\boldsymbol{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}; \qquad \{\boldsymbol{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12}
$$