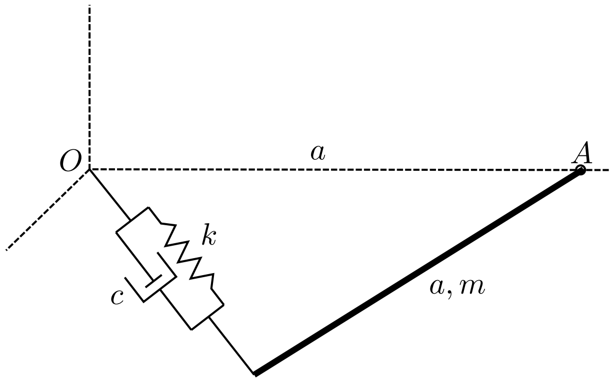
Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 2011)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla pesada de longitud a y masa m está articulada en un extremo a un punto fijo A. Además se encuentra unida por el otro extremo a otro punto fijo O situado a una distancia a en el mismo plano horizontal que pasa por A, mediante un conjunto muelle-amortiguador de masa despreciable, constantes k y c y longitud natural nula. La varilla se puede mover en el espacio tridimensional sin más restricción a su movimiento que la que impone su extremo fijo A. Se pide:



1. Determinar el número de grados de libertad del problema y justificar la elección de unos parámetros que los representen.
2. Obtener la expresión de la energía cinética de la varilla.
3. Obtener las expresiones de las fuerzas generalizadas asociadas a la acción del muelle y el amortiguador sobre la varilla.
4. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento de la varilla.
5. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de la varilla.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar por el ángulo θ que forma la varilla con el segmento OA y su giro φ alrededor de esta misma recta. El giro φ se mide de forma que en $\varphi = 0$ el plano que contiene a la varilla y al punto O es vertical.

2.— Por conveniencia definimos el sistema móvil $\{A; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}\}$ de manera que $\boldsymbol{j}'$ lleva la dirección del segmento OA, $\boldsymbol{i}'$ es perpendicular al plano definido por éste y la varilla, y $\boldsymbol{k}'$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. También definimos un sistema móvil $\{A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ligado a la varilla de manera que $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}'$ y $\boldsymbol{j}$ lleva la dirección de la varilla.

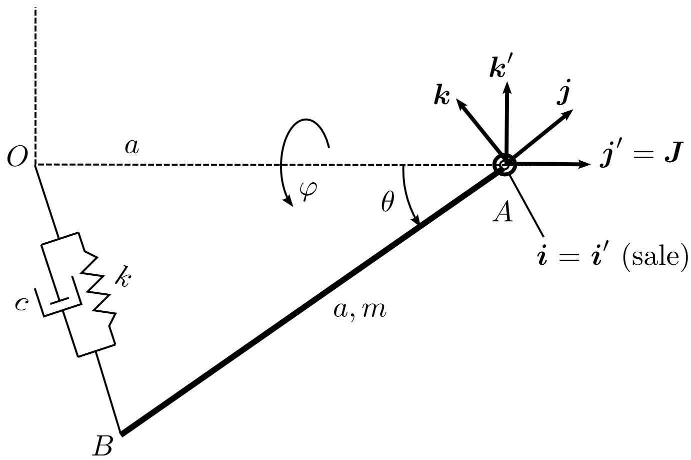


Figura 1: *Vista de la varilla en verdadera magnitud. Definición de sistemas auxiliares.*

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}$ y que $\boldsymbol{j}' = \cos\theta\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$, la velocidad de rotación de la varilla se expresa en el triedro del cuerpo como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i}' + \dot{\varphi}\boldsymbol{j}' = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{j} - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que en triedro del cuerpo el tensor de inercia de la varilla es:

$$\boldsymbol{I}_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A = \frac{1}{3}ma^2 \tag{2}$$

la energía cinética resulta:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_A\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{6}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta) \tag{3}$$

3.— Llamando B al extremo libre de la varilla y teniendo en cuenta que $\overline{OB} = 2a\operatorname{sen}\theta/2$, las fuerzas generalizadas del muelle se pueden calcular a partir de su potencial $V_m = (1/2)k\,\overline{OB}^2 = 2ka^2\operatorname{sen}^2\theta/2$ como:

$$Q_{m_\theta} = -\frac{\partial V_m}{\partial\theta} = -ka^2\operatorname{sen}\theta\,, \qquad Q_{m_\varphi} = -\frac{\partial V_m}{\partial\varphi} = 0 \tag{4}$$

También se podrían haber calculado a partir de su trabajo virtual; Teniendo en cuenta que la fuerza $-k\,\overline{OB}$ es central, $\delta W_m = -k\,\overline{OB}\cdot\delta\overline{OB} = -k2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot a\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta = Q_{m\theta}\delta\theta + Q_{m\varphi}\delta\varphi$, obteniéndose igual resultado (4) Las fuerzas generalizadas del amortiguador deben calcularse a partir de su trabajo virtual:

$$\delta W_a = -c\frac{\mathrm{d}\overline{OB}}{\mathrm{d}t}\delta\overline{OB} = -c\cdot a\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2}\cdot a\delta\theta\cos\frac{\theta}{2} = -ca^2\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,, \tag{5}$$

de donde se obtiene directamente

$$Q_{a_\theta} = -ca^2\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}\,, \qquad Q_{a_\varphi} = 0\,. \tag{6}$$

4.— No hay ninguna integral primera: no hay conservación ni de cantidad de movimiento ni de momento cinético de la varilla en ninguna dirección, y tampoco la energía se conserva, ya que la fuerza del amortiguador trabaja y no es conservativa. Las mismas conclusiones podrían obtenerse con el formalismo Lagrangiano, ya que hay fuerzas que no derivan de un potencial y se podría comprobar que no existen coordenadas cíclicas.

5.— La energía potencial gravitatoria se calcula a partir de la distancia h del centro de la varilla al plano horizontal que pasa por A:

$$V_g = -mgh = -mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{7}$$

y sus correspondientes fuerzas generalizadas son:

$$Q_{g_\theta} = -\frac{\partial V_g}{\partial\theta} = mg\frac{a}{2}\cos\theta\cos\varphi \qquad , \qquad Q_{g_\varphi} = -\frac{\partial V_g}{\partial\varphi} = -mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \tag{8}$$

Finalmente, las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen planteando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} - \frac{1}{6}ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}2\theta = -ka^2\operatorname{sen}\theta - ca^2\cos^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta} + mg\frac{a}{2}\cos\theta\cos\varphi \tag{9}$$

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{3}ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}2\theta = -mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \tag{10}$$