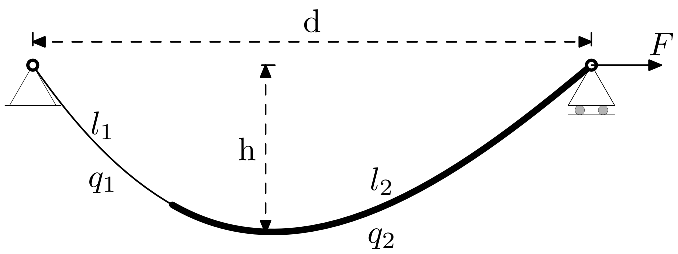
Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 2011)

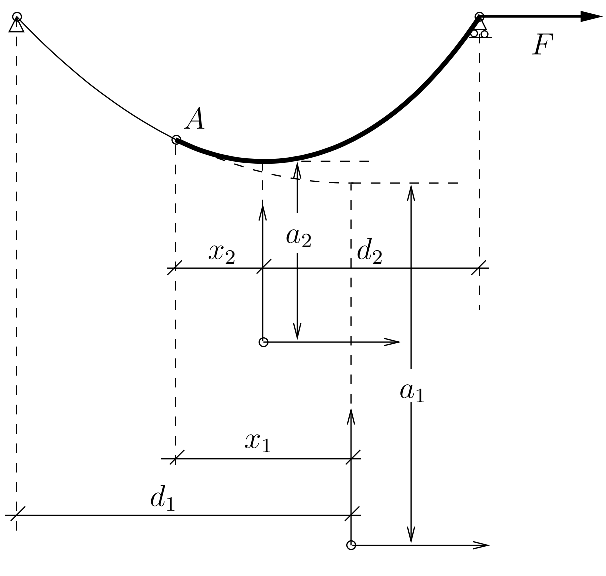
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.



Un cable está formado por dos tramos 1 y 2 unidos en un punto de sus extremos, de pesos por unidad de longitud q_1 y q_2 respectivamente. La longitud del tramo 2 es l_2 conocida, siendo la longitud del otro tramo l_1 incógnita. El tramo 1 está anclado a un punto fijo y el tramo 2 está anclado a un carrito apoyado en un plano horizontal, situado a la misma altura, sobre el que actúa una fuerza horizontal de valor F. En la configuración de equilibrio se sabe que la flecha del cable es h. Se utilizarán los siguientes valores para resolver el problema: $F = 300$ N, $q_1 = 10$ N/m, $q_2 = 20$ N/m, $h = 12$ m y $l_2 = 30$ m. Se pide:

1. Parámetros de las catenarias.
2. Longitud l_1.
3. Distancia d entre apoyos.
4. Tensión máxima de los cables.



1.— Los tramos de cable formarán sendas catenarias, que tendrán en común el punto A, en el cual habrá continuidad de la tangente. La tensión horizontal de ambas es igual y de valor F, por lo que los parámetros son:

$$a_1 = \frac{F}{q_1} = 30\,\mathrm{m}\,, \quad a_2 = \frac{F}{q_2} = 15\,\mathrm{m}\,. \tag{1}$$

2.— Sea d_1 la distancia horizontal del vértice de la catenaria 1 al extremo izquierdo, y x_1 la abscisa del punto A medida desde este vértice, consideradas ambas positivas. Análogamente, sea d_2 la distancia horizontal desde el vértice de la catenaria 2 hasta el extremo derecho, y x_2 la abscisa del punto A desde este vértice, también positivas. La ecuación que define la longitud conocida del tramo 2 es

$$l_2 = 30 = a_2\left(\operatorname{senh}\frac{d_2}{a_2} + \operatorname{senh}\frac{x_2}{a_2}\right). \tag{2}$$

El dato de la flecha del cable conduce a

$$h = a_2\left(\cosh\frac{d_2}{a_2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \cosh\frac{d_2}{a_2} = 1 + \frac{h}{a_2}\,. \tag{3}$$

Por último, la continuidad de ambas catenarias en A conduce a

$$a_2\left(\cosh\frac{d_2}{a_2}-\cosh\frac{x_2}{a_2}\right)=a_1\left(\cosh\frac{d_1}{a_1}-\cosh\frac{x_1}{a_1}\right), \tag{4}$$

$$\operatorname{senh}\frac{x_2}{a_2}=\operatorname{senh}\frac{x_1}{a_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_1}{a_1}\,. \tag{5}$$

Mediante las cuatro ecuaciones (2, 3, 4, 5) es posible obtener los valores desconocidos de (x_1, d_1, x_2, d_2). A partir de estos, la longitud pedida del tramo 1 será

$$l_1=a_1\left(\operatorname{senh}\frac{d_1}{a_1}-\operatorname{senh}\frac{x_1}{a_1}\right). \tag{6}$$

De la ecuación (3)

$$\cosh\frac{d_2}{a_2}=1+\frac{12}{15}=\frac{9}{5}\quad\Rightarrow\quad d_2=17{,}893661\,\mathrm{m}\,; \tag{7}$$

sustituyendo en (2):

$$\operatorname{senh}\frac{x_2}{a_2}=\frac{l_2}{a_2}-\operatorname{senh}\frac{d_2}{a_2}=\frac{30}{15}-\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2-1}=2-\sqrt{\frac{56}{25}}\ \Rightarrow\ x_2=7{,}262919\,\mathrm{m}\,; \tag{8}$$

y empleando (5)

$$x_1=a_1\frac{x_2}{a_2}=14{,}525537\,\mathrm{m}\,. \tag{9}$$

Entrando con estos datos en (4):

$$\begin{aligned}\cosh\frac{d_1}{a_1}&=\cosh\frac{x_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}\left(\cosh\frac{d_2}{a_2}-\cosh\frac{x_2}{a_2}\right)\\&=\sqrt{1+\left(2-\sqrt{56/25}\right)^2}+\frac{15}{30}\left(\frac{9}{5}-\sqrt{1+\left(2-\sqrt{56/25}\right)^2}\right)\\&\qquad\Rightarrow\quad d_1=27{,}76595\,\mathrm{m}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Sustituyendo los valores de (10, 9) en (6) se obtiene

$$l_1=16{,}803226\,\mathrm{m}\,. \tag{11}$$

3.— La distancia total entre ambos apoyos se puede obtener como

$$d=(d_1-x_1)+(d_2+x_2)=38{,}396691\,\mathrm{m}\,. \tag{12}$$

4.— La tensión máxima en el extremo de cada uno de los cables es

$$T_{\max,1}=q_1a_1\cosh\frac{d_1}{a_1}=437{,}9296\,\mathrm{N}\,;\quad T_{\max,2}=q_2a_2\cosh\frac{d_2}{a_2}=540\,\mathrm{N}\,, \tag{13}$$

por tanto será este último valor la tensión máxima absoluta entre los dos cables.