Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

En el movimiento general de un sólido se conoce la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y la velocidad de uno de sus puntos $\boldsymbol{v}_O$. Deducir la expresión del lugar geométrico de los puntos del sólido que tienen velocidad mínima (eje del movimiento helicoidal tangente) y expresar la relación que debe existir entre $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{v}_O$ para que el campo de velocidades se pueda interpretar como una rotación instantánea. Aplicación: La velocidad angular de un sólido rígido es $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y la velocidad de uno de sus puntos es $\boldsymbol{v}_O = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$. Obtener la relación que deben verificar α y β para que el movimiento corresponda a una rotación instantánea. (5 ptos.)

El campo de velocidades del sólido, para un punto P cualquiera del sólido, definido por el vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{OP}$ que une O con P es

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}\,. \tag{1}$$

Los puntos de velocidad mínima son aquellos en los que la velocidad es paralela al vector velocidad angular, es decir

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{\Omega}\,, \tag{2}$$

lo que define una ecuación vectorial para la incógnita $\boldsymbol{r}$. Para despejarla se multiplica vectorialmente por $\boldsymbol{\Omega}$, obteniendo

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\Omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_O}{\Omega^2} + \alpha\boldsymbol{\Omega}}\,, \tag{3}$$

que define como lugar geométrico una recta paralela a $\boldsymbol{\Omega}$, denominada *eje del movimiento helicoidal tangente* (EHT). Para que exista solución a (2) debe cumplirse la ecuación de compatibilidad,

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\lambda\Omega - \boldsymbol{v}_O) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O}{\Omega^2}\,. \tag{4}$$

Este valor de λ sustituido en (2) permite calcular la velocidad en los puntos del eje, que es precisamente la velocidad mínima:

$$\boldsymbol{v}_{\min} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O}{\Omega^2}\boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad v_{\min} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O\,. \tag{5}$$

Cuando esta velocidad mínima sea nula el campo de velocidades será una rotación alrededor del EHT que se denominará en este caso *eje instantáneo de rotación* (EIR). La condición será por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O = 0}\,, \tag{6}$$

expresión que puede calcularse en cualquier punto O del sólido ya que es invariante *(invariante escalar)*. Aplicando la condición anterior al ejemplo propuesto resulta

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \cdot (\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}) = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha + \beta = 0}\,. \tag{7}$$

Para el movimiento de una partícula relativo a un sistema de referencia no inercial, *enunciar* el principio de cantidad de movimiento *expresando* las fuerzas de inercia correspondientes. *Definir* unas condiciones bajo las que la fuerza de inercia de arrastre proviene de un potencial y *deducir* la expresión del mismo. *Aplicación:* una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral lisa en un aro de radio R que gira con velocidad constante ω_0 alrededor de su diámetro vertical fijo. Obtener las expresiones de las fuerzas de inercia para un observador ligado al aro y discutir la existencia de un potencial de inercia de arrastre, deduciendo su expresión en caso de que exista. (5 ptos.)

Tendremos en cuenta la expresión de la aceleración en un movimiento relativo,

$$\boldsymbol{a} = \underbrace{\boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\boldsymbol{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}}}_{\boldsymbol{a}_{\text{cor}}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} \,. \tag{1}$$

La ecuación fundamental de la dinámica (o principio de la cantidad de movimiento) se puede expresar como

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_{\text{arr}} - m\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = m\boldsymbol{a}_{\text{rel}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{arr}} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = m\boldsymbol{a}_{\text{rel}}}\,, \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la resultante de todas las fuerzas activas y las reacciones, y se han empleado las *fuerzas de inercia* definidas como

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\text{arr}} = -m\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = -m[\boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})]\,; \\ \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -m\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = -m(2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}})\,. \end{cases}} \tag{3}$$

Para estudiar la existencia de un potencial de arrastre obtenemos el trabajo elemental de esta fuerza,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{arr}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} &= -m\boldsymbol{a}_O \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} - m(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} - m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \\ &= -m\boldsymbol{a}_O \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} + m\Omega^2 \boldsymbol{\rho} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho})\,, \end{aligned} \tag{4}$$

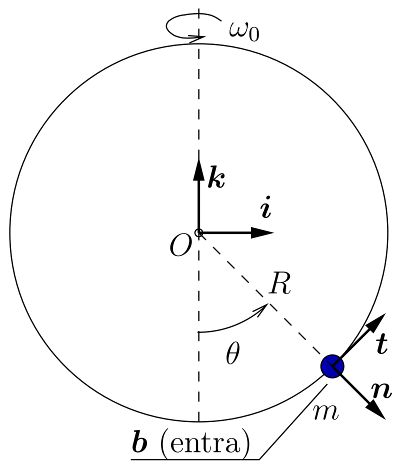
donde se ha supuesto $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$. Suponiendo adicionalmente que $\boldsymbol{a}_O$ sea constante es fácil comprobar que esta expresión es una diferencial exacta,

$$\boldsymbol{F}_{\text{arr}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \mathrm{d}\left[-m\boldsymbol{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2}\Omega^2\rho^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2\right] = -\mathrm{d}V_{\text{arr}} \tag{5}$$

$$\boxed{V_{\text{arr}} = m\boldsymbol{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{m}{2}\Omega^2\rho^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2\,.} \tag{6}$$

Aplicación. En este caso es $\boldsymbol{a}_O = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Omega} = \omega_0\,\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{\theta}R\,\boldsymbol{t}$. Aplicando (3) se obtienen las fuerzas de inercia:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\text{arr}} = m\omega_0^2 R \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} & \text{(centrífuga)}\,; \\ \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -2m\omega_0\dot{\theta}R\cos\theta\,\boldsymbol{b} & \text{(normal al plano)}\,. \end{cases} \tag{7}$$



Se cumplen las condiciones para la existencia del potencial de la fuerza de arrastre, por lo que aplicando (6) resulta:

$$V_{\text{arr}} = -\frac{m}{2}\omega_0^2 R^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 R^2 \cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{arr}} = -\frac{m}{2}\omega_0^2 R^2 \operatorname{sen}^2\theta\,.}$$

(Debe tenerse en cuenta que la resultante de fuerzas $\boldsymbol{F}$ en (2) como se ha dicho debe incluir además del peso las reacciones normales al aro, una dentro de su plano y otra normal al mismo y que anularía la fuerza de coriolis.)