Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sólido con un punto fijo O, tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ y el movimiento más general posible. A partir del principio del momento cinético, *obtener* las ecuaciones de Euler de la dinámica, *expresándolas* tanto de forma vectorial como en sus componentes en el triedro del cuerpo. En el caso de que el sólido sea de revolución y el eje pase por O, *discutir y obtener* la posible simplificación de las ecuaciones de Euler. *Aplicación*: expresar las ecuaciones de la dinámica para un disco de masa m y radio R, con su centro O fijo y sometido únicamente a su propio peso. (5 ptos.)

El movimiento más general del sólido es una rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por O, variable con el tiempo. El momento cinético vale $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$, donde el tensor de inercia es constante para un observador ligado al sólido. La dinámica se define mediante el principio del momento cinético, en el que se puede desarrollar la derivada como la relativa al sistema del cuerpo ($\boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}$) más el término complementario de derivación:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})\,. \tag{1}$$

Esta expresión es la *ecuación de Euler en forma vectorial.* Tomando unos ejes principales de inercia ligados al cuerpo en los que $[\boldsymbol{I}_O] = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ y $\{\boldsymbol{\Omega}\}^{\mathrm{T}} = (p, q, r)$, las *componentes de las ecuaciones de Euler* son

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - qr(B - C) \\ M_y = A\dot{q} - rp(C - A) \\ M_z = C\dot{r} - pq(A - B) \end{cases} \tag{2}$$

Las componentes en el triedro del cuerpo de $\{\boldsymbol{\Omega}\}^{\mathrm{T}} = (p, q, r)$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler u otros parámetros, cuestión que no se detalla aquí.

Si el sólido es de revolución, suponiendo sin pérdida de generalidad el eje de revolución $(O, \boldsymbol{k})$, el tensor de inercia será $[\boldsymbol{I}_O] = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{smallmatrix}\right)$. Es conveniente además considerar como sistema relativo para la derivación el ligado al *triedro intermedio*, cuyo movimiento es el del cuerpo sin la rotación propia $\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, es decir con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$. Al ser el sólido de revolución, este triedro también tiene la propiedad de que el tensor de inercia es invariante para un observador ligado al mismo. Por tanto, la ecuación de Euler vectorial se puede expresar como

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ref}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ref}} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})\,. \tag{3}$$

Denominando las componentes en el triedro intermedio $\{\boldsymbol{\Omega}\}^{\mathrm{T}} = (p', q', r)$ (la componente r es

igual en los dos triedros), las componentes de la ecuación anterior resultan

$$\begin{cases} M_u = A\dot{p}' - q'r(A-C) + Aq'\dot{\varphi} \\ M_v = A\dot{q}' - rp'(C-A) - Ap'\dot{\varphi} \\ M_z = C\dot{r} \end{cases} \tag{4}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en función de los ángulos de Euler sustituyendo sus expresiones $p' = \dot{\theta}$, $q' = \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$. En el caso en que sea $M_z = 0$ la componente de la velocidad angular sobre el eje de revolución será $r = \mathrm{cte}$.

Aplicación: El disco es un sólido de revolución con $A = B = mR^2/4$, $C = mR^2/2$. El peso no produce momentos en el centro de masa O del disco, por lo que las ecuaciones en el triedro intermedio (4) serán

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{4}mR^2\dot{p}' - q'r(\frac{1}{4}mR^2 - \frac{1}{2}mR^2) + \frac{1}{4}mR^2q'\dot{\varphi} \\ 0 = \frac{1}{4}mR^2\dot{q}' - rp'(\frac{1}{2}mR^2 - \frac{1}{4}mR^2) - \frac{1}{4}mR^2p'\dot{\varphi} \\ 0 = \frac{1}{2}mR^2\dot{r} \quad \Rightarrow \quad r = \mathrm{cte}. \end{cases} \tag{5}$$

Sustituyendo las expresiones en función de los ángulos de Euler y teniendo en cuenta la constancia de r, las dos primeras ecuaciones anteriores resultan

$$\begin{cases} 0 = \dot{p}' + q'r + q'\dot{\varphi} = \dot{p}' + q'(2r - \dot{\psi}\cos\theta) = \ddot{\theta} + 2r\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta - \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,, \\ 0 = \dot{q}' - rp' - p'\dot{\varphi} = \dot{q}' - p'(2r - \dot{\psi}\cos\theta) = \ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta - 2r\dot{\theta} + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,. \end{cases} \tag{6}$$