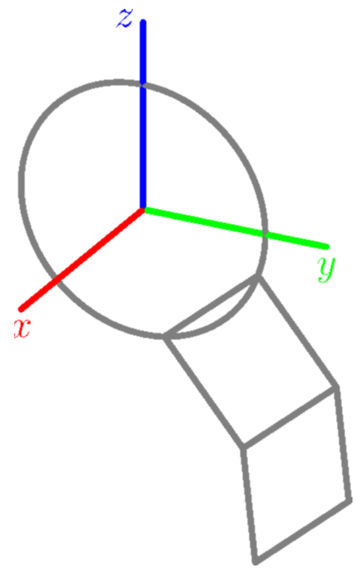
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

El sistema mecánico de la figura está formado por dos placas cuadradas homogéneas pesadas de masa m y lado r, y una circunferencia fija en el plano yz de radio r. Una de las placas puede deslizar por la circunferencia mediante dos vértices contiguos, manteniéndose siempre en el plano yz, mientras que la otra tiene uno de los lados coincidente con el lado formado por los otros dos vértices de la primera placa, permitiéndose el giro respecto del lado común.



Se pide:

1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Ecuaciones del movimiento.
3. Ecuaciones linealizadas alrededor de la posición de equilibrio estable.
4. Frecuencias propias y modos propios de las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, para los cuales escogemos los parámetros siguientes: el giro θ de la placa 1 alrededor del eje Ox, y el giro φ de la placa 2 alrededor del borde de unión con la primera.

2.— La primera placa tiene un movimiento plano, su energía cinética vale

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(r\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{6}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\left(\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{1}$$

La segunda placa hereda el movimiento de arrastre debido al giro $\dot{\theta}$ y tiene además la velocidad relativa $\dot{\varphi}$. Obtenemos en primer lugar la velocidad de su centro,

$$v_2^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\dot{\varphi}\right)^2. \tag{2}$$

La velocidad angular de esta segunda placa es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\;\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{k}\,, \tag{3}$$

donde las direcciones del triedro local se han tomado: $\boldsymbol{i}$ paralela al borde de unión, $\boldsymbol{j}$ según el otro borde en el plano de la placa y $\boldsymbol{k}$ normal a las anteriores. El tensor central de inercia en estos ejes (principales) tiene las componentes $[\boldsymbol{I}_2] = \frac{mr^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con lo que la energía cinética resulta

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_2\cdot\boldsymbol{\Omega} \\
&= \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2\left[\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\varphi\right] + \frac{1}{8}mr^2\dot\varphi^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mr^2\big(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\operatorname{sen}^2\varphi + 2\dot\theta^2\cos^2\varphi\big)\,. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Sumando (1) y (4) se obtiene la energía cinética conjunta,

$$
T = T_1 + T_2 = \frac{m}{6}r^2\dot\theta^2\left[9\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big) + \cos^2\varphi + 3\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\varphi\right] + \frac{m}{6}r^2\dot\varphi^2\,. \qquad (5)
$$

El potencial gravitatorio vale

$$
V = mgz_1 + mgz_2 = -mgr\big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\theta - mgr\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\theta - mg\frac{r}{2}\cos\varphi\cos\theta\,. \qquad (6)
$$

Finalmente la Lagrangiana resulta

$$
\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{m}{6}r^2\dot\theta^2\left[9\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big) + \cos^2\varphi + 3\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\varphi\right] + \frac{m}{6}r^2\dot\varphi^2 \\
&\qquad + mgr\big(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\big)\cos\theta + mg\frac{r}{2}\cos\varphi\cos\theta\,. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Sin más que derivar, resultan las ecuaciones de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{3}r^2\ddot\theta\left[9\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big) + \cos^2\varphi + 3\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\cos\varphi\right] \\
&\quad - \frac{m}{3}r^2\dot\theta\dot\varphi\left[2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 3\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\operatorname{sen}\varphi\right] + mgr\big(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\big)\operatorname{sen}\theta + mg\frac{r}{2}\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\,; \qquad (8) \\
0 &= \frac{m}{3}r^2\ddot\varphi + \frac{m}{6}r^2\dot\theta^2\left[2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + 3\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\operatorname{sen}\varphi\right] + mg\frac{r}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

3.— La posición de equilibrio estable es cuando las placas están en la posición más baja posible: $\theta = 0$, $\varphi = 0$. Linealizando las ecuaciones (8) y (9) resultan dos ecuaciones desacopladas,

$$
0 = \frac{m}{3}r^2\ddot\theta(13+6\sqrt{3}) + mgr(2+\sqrt{3})\theta\,; \qquad (10)
$$

$$
0 = \frac{m}{3}r^2\ddot\varphi + mg\frac{r}{2}\varphi\,. \qquad (11)
$$

4.— Al ser las ecuaciones (10) y (11) desacopladas los modos de vibración coinciden con cada una de las coordenadas: $\{\mathbf{a}_1\} = (1,0)$, $\{\mathbf{a}_2\} = (0,1)$. De los coeficientes de masa y rigidez resultan las frecuencias propias:

$$
\omega_1^2 = \frac{g}{r}\frac{3(2+\sqrt{3})}{13+6\sqrt{3}}\,; \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{r}\frac{3}{2}\,. \qquad (12)
$$