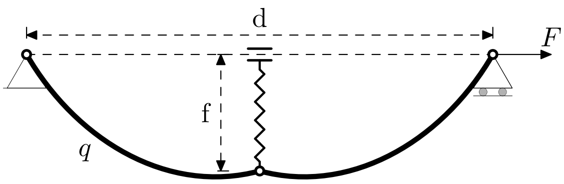
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

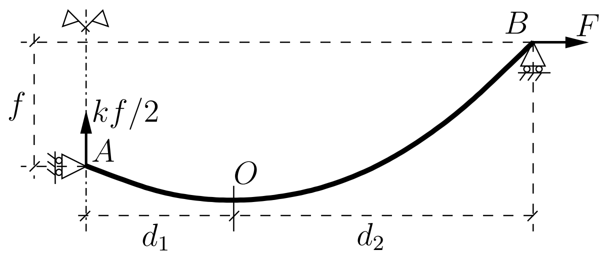
Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.



Un cable de peso unitario q cuelga entre dos puntos situados a la misma altura. El punto de anclaje situado a la izquierda está fijo y el otro puede moverse horizontalmente sin rozamiento. Sobre este último actúa una fuerza horizontal F. Entre la recta que une los anclajes del cable y el mismo, existe un muelle de constante k y longitud natural nula. El muelle está unido por un lado al punto medio del cable, mientras que el otro puede deslizar sin rozamiento por la recta que une los puntos de anclaje. En la configuración de equilibrio se sabe que la flecha en el punto medio es f.

Suponiendo conocidos q, F, k y f se pide:

1. Longitud del cable.
2. Distancia entre apoyos.
3. Tensión máxima del cable.



1. Dadas las condiciones simétricas del problema (F se transmite directamente hasta el otro apoyo al no existir otras fuerzas horizontales), en equilibrio el cable adopta la forma de dos arcos de catenaria simétricos, por lo que nos centraremos en uno de ellos según la figura.

La componente horizontal de la tensión es constante en el cable, igual a F en B según el enunciado. Por tanto $a = F/q$ es el parámetro de la catenaria. Además, la componente vertical de la tensión es $qa\operatorname{senh}(x/a)$, siendo x la distancia horizontal al vértice O de la catenaria. Esta componente vertical en A debe igualar la mitad de la fuerza del muelle (la otra mitad se transfiere a la catenaria simétrica),

$$qa\operatorname{senh}\frac{d_1}{a} = \frac{kf}{2}, \tag{1}$$

por lo que

$$\operatorname{senh}\frac{qd_1}{F} = \frac{kf}{2F}. \tag{2}$$

Por otra parte, la ecuación de la catenaria es $z = a\cosh(x/a)$. Sabemos que la diferencia de alturas entre B y A es f, esto es,

$$a\left(\cosh\frac{d_2}{a} - \cosh\frac{d_1}{a}\right) = f. \tag{3}$$

Recordando $1 + \operatorname{senh}^2 u = \cosh^2 u$, las ecuaciones (1) y (3) permiten escribir

$$\cosh \frac{qd_2}{F} = \frac{qf}{F} + \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{4F^2}} \quad \text{y} \tag{4}$$

$$\operatorname{senh} \frac{qd_2}{F} = \sqrt{\left(\frac{qf}{F} + \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{4F^2}}\right)^2 - 1}. \tag{5}$$

La longitud total del cable es el doble de la longitud de cada arco de catenaria, igual a su vez a la suma de los arcos de catenaria OA y OB. Esto es,

$$s = 2a \left(\operatorname{senh} \frac{d_1}{a} + \operatorname{senh} \frac{d_2}{a}\right). \tag{6}$$

Recuperando (2) y (5) obtenemos

$$s = \frac{kf}{q} + \frac{2F}{q} \sqrt{\left(\frac{qf}{F} + \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{4F^2}}\right)^2 - 1}. \tag{7}$$

2. La distancia entre apoyos es $d = 2(d_1 + d_2)$, quedando determinada por (2) y (4). Explícitamente,

$$d = \frac{2F}{q} \left[\operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{kf}{2F}\right) + \cosh^{-1} \left(\frac{qf}{F} + \sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{4F^2}}\right)\right]. \tag{8}$$

3. Finalmente, la tensión máxima del cable es la tensión del punto más elevado B,

$$T_{\text{máx}} = qa \cosh \frac{d_2}{a}. \tag{9}$$

Sustituyendo (4) resulta

$$T_{\text{máx}} = qf + F\sqrt{1 + \frac{k^2 f^2}{4F^2}}. \tag{10}$$