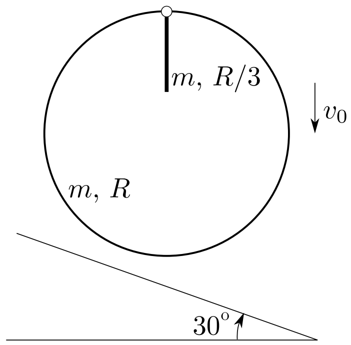
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2011)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

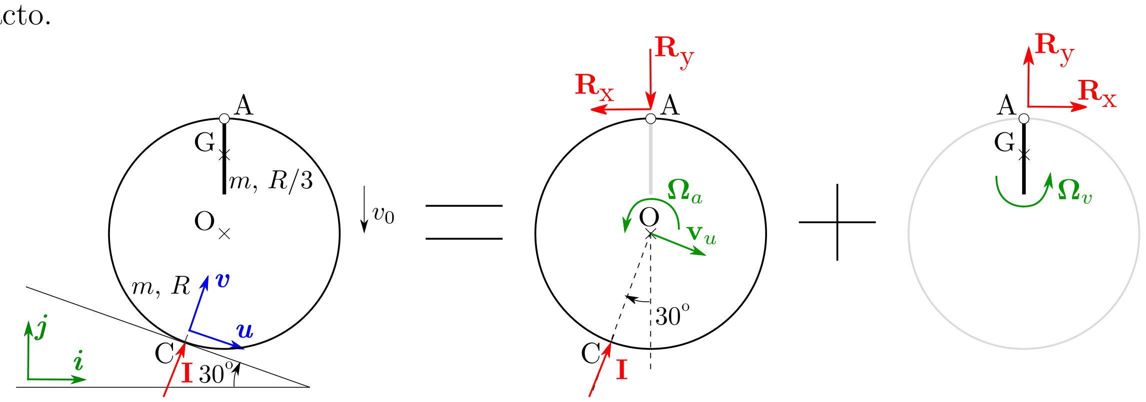
Un sistema formado por un aro de masa m y radio R y una varilla de longitud $R/3$ y masa m cae, con un movimiento de traslación vertical, hasta chocar con una velocidad v_0 con un plano liso inclinado 30º respecto de la horizontal. Un extremo de la varilla está articulado al aro en su punto más alto tal como indica la figura. El choque es liso y tiene un coeficiente de restitución $e = 0$.



Se pide:

1. Calcular las velocidades de los centros de masa del aro y la varilla y velocidades angulares de rotación de cada cuerpo después del choque.
2. Valor de la impulsión reactiva en el punto de choque.
3. Valor de la impulsión interna en el enlace entre aro y varilla.

La siguiente figura muestra la descomposición del sistema aro-varilla justo después del impacto.



Dado que el choque es liso y que el coeficiente de restitución es nulo sabemos que el punto de choque C del aro tendrá velocidad nula en la dirección normal $\boldsymbol{v}$ y deslizará libremente en la dirección tangencial $\boldsymbol{u}$. Esto hace que la cinemática del sistema se defina como:

- Cinemática antes del choque:

$$\text{Aro} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_O^{\text{antes}} = -v_0\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\Omega}_a^{\text{antes}} = \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{Varilla} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_G^{\text{antes}} = -v_0\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{\Omega}_v^{\text{antes}} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

- Cinemática después del choque:

$$\text{Aro} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_O^{\text{después}} = v_u\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\Omega}_a^{\text{después}} = \Omega_a\boldsymbol{k} \end{cases} \qquad \text{Varilla} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_G^{\text{después}} = \boldsymbol{v}_A + \Omega_v\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{r}_{AG} = v_u\boldsymbol{u} - \Omega_a\, R\boldsymbol{i} + \Omega_v \dfrac{R}{6}\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{\Omega}_v^{\text{después}} = \Omega_v\boldsymbol{k} \end{cases}$$

La percusión reactiva $\boldsymbol{I}$ en C sólo tendrá dirección normal $\boldsymbol{v}$ (por ser un choque liso) y la percusión interna de enlace en A entre aro y varilla sólo tiene componentes R_x y R_y.

Las ecuaciones a imponer son:

- Balance de la cantidad de movimiento en el aro.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mv_u = I\frac{1}{2} - R_x \tag{1}$$

$$-\frac{1}{2}mv_u + mv_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}I - R_y \tag{2}$$

- Balance del momento cinético en el aro calculado en O.

$$mR^2\,\Omega_a = R_x\,R \tag{3}$$

- Balance de la cantidad de movimiento en la varilla.

$$m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,v_u - \Omega_a\,R + \Omega_v\frac{R}{6}\right) = R_x \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2}mv_u + mv_0 = R_y \tag{5}$$

- Balance del momento cinético en la varilla calculado en G.

$$\frac{1}{12}m\left(\frac{R}{3}\right)^2\,\Omega_v = -R_x\,\frac{R}{6} \tag{6}$$

1.- Tenemos un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas. De la ecuación (6) obtenemos $R_x = -\frac{mR}{18}\Omega_v$ que, llevada a (3) nos permite obtener $\Omega_a = -\frac{\Omega_v}{18}$ y llevada a (1) nos permite obtener $I = \sqrt{3}mv_u - \frac{mR}{9}\Omega_v$. Utilizando las anteriores expresiones y la ecuación (5) podemos escribir las ecuaciones (2) y (4) de la siguiente forma:

$$45v_u - \sqrt{3}R\Omega_v = 36v_0$$

$$9\sqrt{3}v_u + 5R\Omega_v = 0$$

que tienen como solución $v_u = \frac{5}{7}v_0$ y $\Omega_v = -\frac{9\sqrt{3}}{7}\frac{v_0}{R}$. El valor de la velocidad angular del aro lo obtenemos de $\Omega_a = -\frac{\Omega_v}{18} = \frac{\sqrt{3}}{14}\frac{v_0}{R}$.

2.- La impulsión reactiva en C la obtenemos de $I = \sqrt{3}mv_u - \frac{mR}{9}\Omega_v = \frac{6\sqrt{3}}{7}mv_0$.

3.- Finalmente las componentes de la impulsión interna en el enlace entre aro y varilla las obtenemos de $R_x = -\frac{mR}{18}\Omega_v = \frac{\sqrt{3}}{14}mv_0$ y $R_y = -\frac{1}{2}mv_u + mv_0 = \frac{9}{14}mv_0$.