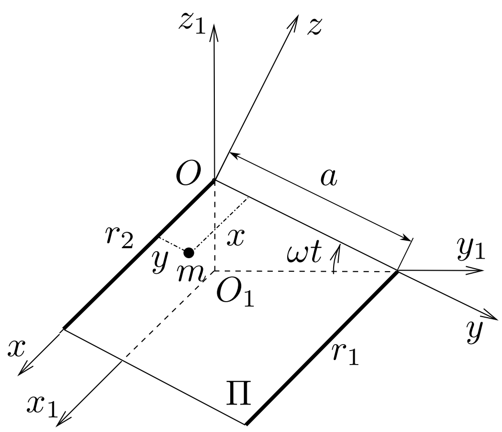
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (2 de diciembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un plano liso Π se mueve respecto a un triedro fijo $O_1x_1y_1z_1$ con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ de tal forma que dos rectas paralelas del mismo r_1 y r_2 que están separadas una distancia a deslizan respectivamente por los planos $O_1x_1y_1$, $O_1x_1z_1$ como se indica en la figura.



Sobre el plano Π se mueve sin rozamiento una partícula de masa m, siendo x e y las coordenadas de la partícula en el triedro móvil $Oxyz$ en un instante genérico.

Se pide:

1. Plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula en función de las coordenadas x e y.
2. Expresar la reacción entre el punto y el plano.

1.— Consideramos el triedro móvil $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ asociado a $Oxyz$ y el fijo $\{O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$ asociado a $O_1x_1y_1z_1$. Las fuerzas sobre la partícula m son el peso $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}_1$ y la reacción normal $\boldsymbol{N} = N\,\boldsymbol{k}$ que ejerce el plano. La ecuación de la dinámica es:

$$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a}\,. \tag{1}$$

Las componentes de la aceleración se pueden expresar a través del triedro móvil:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$$

donde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})\\ \boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\,,\end{aligned}$$

y siendo $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$. La velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = -\omega\,\boldsymbol{i}$, por lo que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0}$. La aceleración $\boldsymbol{a}_O$ se puede calcular sabiendo que el movimiento del punto O tiene lugar a lo largo de la recta O_1z_1, siendo $O_1O = z_{1O} = a \operatorname{sen}\omega t$, de modo que $\boldsymbol{a}_O = \ddot{z}_{1O}\boldsymbol{k}_1 = -a\omega^2 \operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{k}_1$.

Teniendo en cuenta $\boldsymbol{k}_1 = \cos\omega t\,\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j}$ y sustituyendo en (1), resultan las tres ecuaciones diferenciales siguientes:

$$0 = m\ddot{x} \tag{2}$$

$$mg \operatorname{sen}\omega t = m(\ddot{y} + a\omega^2 \operatorname{sen}^2\omega t - \omega^2 y) \tag{3}$$

$$N - mg\cos\omega t = -m(a\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t + 2\omega\dot{y}) \tag{4}$$

2.— La expresión de la reacción N se despeja directamente de la ecuación (4):

$$N = mg\cos\omega t - m(a\omega^2 \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t + 2\omega\dot{y}) \tag{5}$$