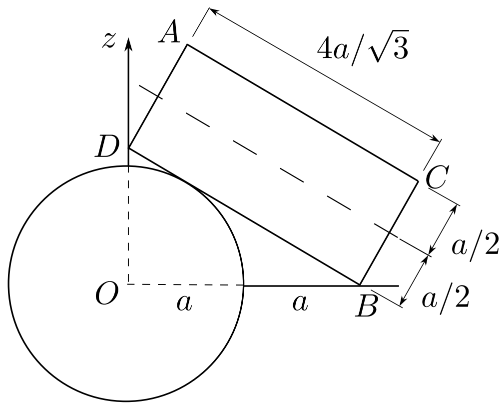
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTR. (2 de diciembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

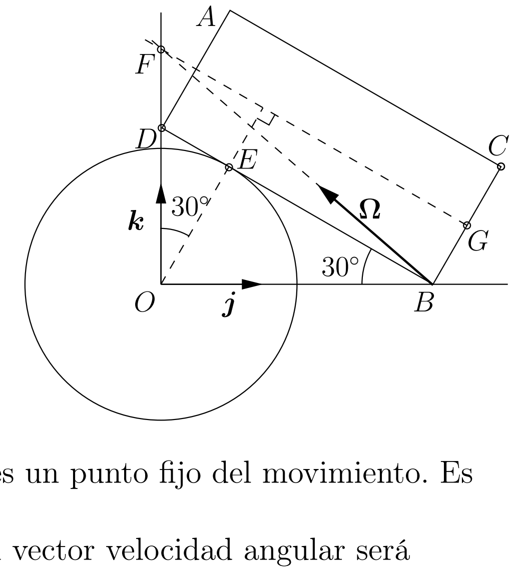


Un cilindro de base circular con radio $a/2$ y altura $4a/\sqrt{3}$ se mueve en el espacio de forma que la circunferencia del borde de una base rueda sin deslizar sobre una circunferencia fija de radio $OB = 2a$ con centro en O, contenida en el plano horizontal Oxy. Este punto O es a su vez el centro de una esfera de radio a en la que se apoya y desliza la superficie lateral del cilindro.

El movimiento del cilindro es tal que la velocidad de sucesión de los puntos de contacto B tiene el valor c (constante), y de forma que el eje del cilindro se mantiene en todo momento dentro del plano vertical que pasa por OB.

Del movimiento así definido se pide:

1. Eje instantáneo de rotación, velocidad angular y aceleración angular del cilindro.
2. Velocidades de rodadura y pivotamiento del cilindro sobre la esfera.
3. Velocidades de los puntos del cilíndro C (diametralmente opuesto a B) y D.



1.— En la figura adjunta se dibuja el plano meridiano que contiene al eje vertical Oz y el eje del cilindro en cada instante. Con las dimensiones dadas en el enunciado, comprobamos en primer lugar que $\angle OBE = \arcsin(\overline{OE}/\overline{OB}) = \arcsin(a/2a) = 30°$. A continuación verificamos la posición de D calculando su proyección sobre el eje horizontal, $\overline{BD}\cos 30° = (4a/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2) = 2a$, por lo que se deduce que el punto geométrico D estará constantemente sobre el eje Oz.

Para establecer el Eje Instantáneo de Rotación (EIR) buscamos dos puntos de velocidad nula. Uno de ellos es B ya que el cilindro rueda sin deslizar en este contacto. Otro es F, la intersección del eje del cilindro con el eje Oz, que es un punto fijo del movimiento. Es decir, el EIR coincide con el eje OF.

Teniendo en cuenta que $\overline{OF} = (3a/2)/\cos 30° = \sqrt{3}a$, el vector velocidad angular será

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\boldsymbol{k}\right). \tag{1}$$

Para calcular el módulo Ω consideramos la velocidad de algún punto del sólido, seleccionamos para esto el centro G de la base del cilindro, que gira alrededor de Oz con la misma velocidad de rotación que B, es decir $c/(2a)$. Teniendo en cuenta que la distancia de G a Oz es $2a + (a/2)\operatorname{sen} 30° = 9a/4$, resulta $v_G = (c/2a)(9a/4) = (9/8)c$. Supondremos que el movimiento es hacia dentro del papel en la figura, tanto para C como para G, es decir según $(-\boldsymbol{i})$. Aplicando ahora la ecuación vectorial del campo de velocidades del sólido,

$$\boldsymbol{v}_G = -\frac{9}{8}c\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BG} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\left(\frac{a}{4}\boldsymbol{j} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}\Omega a\,\boldsymbol{i}\,, \tag{2}$$

de donde despejamos

$$\Omega = \frac{\sqrt{21}}{2}\frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{c}{a}\big(-\sqrt{3}\,\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\boldsymbol{k}\big)\,. \tag{3}$$

Este vector velocidad angular pertenece al plano meridiano, que gira alrededor de Oz con velocidad angular $c/(2a)$. Por tanto la aceleración angular es

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{c}{2a}\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c^2}{a^2}\boldsymbol{i}\,. \tag{4}$$

2.— Las velocidades de rodadura y pivotamiento son respectivamente las proyecciones de la velocidad angular (3) sobre el plano tangente y sobre la normal:

$$\Omega_r = \boldsymbol{\Omega}\cdot(-\cos 30^\circ\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}30^\circ\boldsymbol{k}) = \frac{9}{4}\frac{c}{a}\,; \tag{5}$$

$$\Omega_p = \boldsymbol{\Omega}\cdot(\operatorname{sen}30^\circ\,\boldsymbol{j} + \cos 30^\circ\boldsymbol{k}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{c}{a}\,. \tag{6}$$

3.— Las velocidades de C y D se obtienen aplicando la expresión vectorial del campo de velocidades, a partir del punto B cuya velocidad es nula:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\left(\frac{a}{2}\boldsymbol{j} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{9}{4}c\,\boldsymbol{i}\,; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BD} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\left(-2a\boldsymbol{j} + \frac{2a}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right) = c\,\boldsymbol{i}\,. \tag{8}$$